

# Парадокс Каллвика. Заряд на оси тороидального магнита.

Kirk T. McDonald

*Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, NJ 08544*

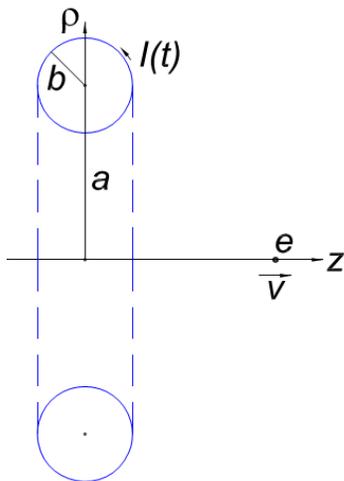
(June 4, 2006)

Translated by Vladimir Onoochin

## 1. Постановка проблемы.

В индукционном линейном ускорителе [1] тороидальный магнит нагружается зависящим от времени током, так что индуцируемое  $E$  поля может передавать энергию от магнита к заряженной частице, которая движется вдоль оси тороида.

Обсудим баланс сил и моментов в идеализированном индукционном линейном ускорителе, состоящем из тороидального магнита с большим радиусом  $a$  и меньшим радиусом  $b$  ( $b \ll a$ ). В то время как настоящие ускорители содержат ферриты с высоким  $\mu$  внутри тороида, обмотки которого сделаны из экранированных или неэкранированных проводников, для нас достаточно рассмотреть непроводящий тороид (без ферритов), в котором токи возникают за счет электрических зарядов, фиксированных на ободах вращающихся дисков. Соседние диски имеют противоположные заряды и вращаются в противоположных направлениях, так что чистый электрический заряд и чистый механический угловой момент тороида равны нулю<sup>1</sup>.



Допустим, что скорость движущегося заряда мала в сравнении со скоростью света (не так в ускорителях) и что временные изменения тока в тороиде медленные, чтобы эффекты запаздывания и излучения могли быть проигнорированы.

---

<sup>1</sup>в такой конфигурации непроводящего тороида нет азимутального тока, в то время как спиральная обмотка тороида дает петлю азимутального тока

Сделаем анализ как в движущейся системе отсчета заряда, так и в неподвижной системе отсчета, то есть в системе, где тороид покоится тороида. Каллвик [2, 3] отметил, что этот пример - парадоксальный, поскольку если ток в соленоиде постоянный, то нет силы, действующей на заряд, но заряд действует определенной силой на тороид.

## 2. Решение.

Сила  $F_e$ , действующая на заряд  $e$  со стороны тороида, вызывает временное изменение механического момента  $P_e$  согласно

$$F_e = \frac{dP_e}{dt} \quad (1)$$

и соответственно, сила  $F_T$ , действующая на тороид, изменяет механический момент  $P_T$  в последнем в соответствии с

$$F_T = \frac{dP_T}{dt} \quad (2)$$

Парадокс (восходящий к Амперу) в том, что магнитное взаимодействие движущегося заряда и тока (также как и магнитное взаимодействие двух движущихся зарядов) в общем случае не подчиняется 3-му закону Ньютона,  $F_e \neq F_T$ , так что полный механический момент системы  $P_{MECH} = P_e + P_T$  не постоянен во времени, при кажущемся нарушении 1-го закона Ньютона для изолированной системы.

Разрешение данного парадокса в том, что электродинамическая система приобретает дополнительный момент  $P_{field}$ , связанный со взаимодействием зарядов и токов с ЭМ полем, так что полный момент изолированной системы,  $P_e + P_T + P_{EM}$ , в этом примере постоянен во времени.

Дальнейшая тонкость анализа в том, что сумма  $P_{mech} + P_{field}$ , будучи постоянной, может давать ненулевое значение для изолированной покоящейся системы. Однако, может быть определен "скрытый" механический момент  $P_h$ , который восстанавливает равенство нулю полного момента системы.

### 2.1. Анализ в лабораторной системе.

#### 2.1.1. Электромагнитный момент.

Для систем, где эффекты запаздывания и излучения могут быть проигнорированы, ЭМ момент может быть вычислен различными эквивалентными способами [4] (в Гауссовой системе)

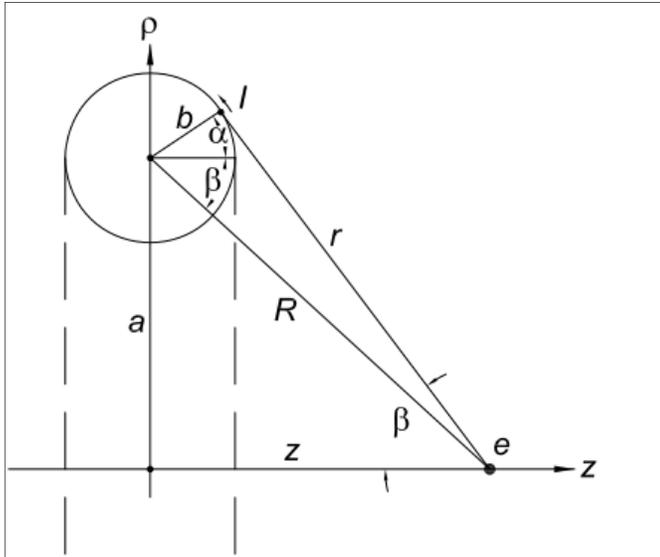
$$P_{EM} = \int \frac{\rho \mathbf{A}}{c} d Vol = \int \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c} d Vol = \int \frac{\Phi \mathbf{J}}{c^2} d Vol \quad (3)$$

где  $\rho$  - плотность электрического заряда,  $\mathbf{A}$  - магнитный вектор-потенциал (в кулоновой калибровке, в которой  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ),  $\mathbf{E}$  - электрическое поле,  $\Phi$  - скалярный потенциал, и  $\mathbf{J}$  - плотность электрического тока. Первый член в правой части (3) введен Фарадеем [5] и Максвеллом [6], второй - Пойнтингом [7] и Абрахамом [8], и третий - Фарри [9].

Чтобы вычислить полевой момент с помощью первой формы (3), нам нужен вектор-потенциал  $\mathbf{A}_T$  тороида в точке нахождения заряда, но нам не нужен вектор-потенциал заряда, т.к. считается, что тороид электрически нейтрален. Вектор-потенциал тороида подчиняется уравнению

$$\nabla \times \mathbf{A}_T = \mathbf{B}_T = B_T \hat{\phi}, \quad (4)$$

где магнитное поле  $\mathbf{B}_T = 2I/a$  внутри соленоида и  $= 0$  вне его. и  $\hat{\phi}$  - единичный вектор в азимутальном направлении в цилиндрических координатах  $(\rho, \phi, z)$ . Тороид центрирован в начале координат с осью  $z$  на оси, как показано на следующем рисунке (с радиусом  $b$  увеличенным для ясности).



Каллвик отмечает [3], что соотношение (4) имеет ту же форму, как и уравнение Максвелла для магнитного поля, так как проводящий провод образует жесткий тороид тех же самых размеров, как и полый тороидальный магнит, и по которому (проводу) идет ток плотности  $\mathbf{J} = J \hat{\phi}$ ,

$$\nabla \times \mathbf{B}_{\text{loop}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} J \hat{\phi}. \quad (5)$$

Мы знаем из закона Био-Савара, что магнитное поле вдоль оси токовой петли есть (для  $b \ll a$ )

$$\mathbf{B}_{\text{loop}}(0, 0, z) \approx \frac{2\pi}{c} \frac{\pi b^2 J a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}. \quad (6)$$

Сравнив (4) и (5), мы видим, что заменив  $4\pi J$  в (6) на  $2I/a$ , мы получим для вектор-потенциала на оси тороида при  $b \ll a$

$$\mathbf{A}_T(0, 0, z) \approx \frac{\pi b^2 I}{c} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}. \quad (7)$$

Поэтому полевой момент системы, когда заряд находится на расстоянии  $z$  на оси тороида

$$\mathbf{P}_{\text{EM}} = \frac{e\mathbf{A}_T(0, 0, z)}{c} = \frac{\pi b^2 I e}{c^2} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}, \quad (8)$$

который не зависит от скорости заряда.

Чтобы вычислить полевой момент с помощью второй формы (3), мы отметим, что  $E$  поле на тороиде от заряда имеет усредненную величину

$E_e = e/(z^2 + a^2)$ , и  $z$ -компонента от  $\mathbf{E}_e \times \mathbf{B}_T$  (только эта компонента останется после интегрирования по объему тороида) есть  $E_e B_T a / \sqrt{z^2 + a^2}$ .

Поэтому<sup>2</sup>

$$\mathbf{P}_{\text{EM}} = \int \frac{\mathbf{E}_e \times \mathbf{B}_T}{4\pi c} d\text{Vol} \approx \frac{e}{z^2 + a^2} \frac{2I}{ac} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \frac{2\pi a \pi b^2}{4\pi c} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\pi b^2 I e}{c^2} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}. \quad (9)$$

Для полноты картины мы вычислим полевой момент с помощью третьей формы (3). Мы должны сохранить первую поправку к пространственной зависимости потенциала  $\Phi$  заряда на тороиде. Обращаясь к фигуре выше, мы видим, что

$$r = \sqrt{R^2 - 2bR \cos(\alpha + \beta) + b^2} \approx R[1 - \frac{b}{R} \cos(\alpha + \beta)], \quad \sin \beta = (a + b \sin \alpha)/r \approx a/R,$$

Таким образом, выживает только  $z$ -компонента интеграла, и замечая, что

$$J_z d\text{Vol} \rightarrow -Ib \sin \alpha d\alpha, \quad \text{мы находим:}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{EM}} &= \int \frac{\Phi_e \mathbf{J}}{c^2} d\text{Vol} = - \int_0^{2\pi} \frac{eI}{c^2 r} b \sin \alpha d\alpha \hat{\mathbf{z}} \\ &\approx - \frac{eIb}{c^2 R} \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \left( 1 + \frac{b}{R} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\pi b^2 I e}{c^2} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (10)$$

### 2.1.2 Сила, действующая на электрический заряд.

Сила  $F$ , действующая на заряд, благодаря электрическому полю  $\mathbf{E}_T$ , создается, когда меняется ток в соленоиде. Это поле обычно вычисляется как временная производная вектор-потенциала (7), Итак:

$$\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}_T = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_T}{\partial t} = -\frac{\pi b^2 \dot{I} e}{c^2} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}, \quad (11)$$

что не зависит от скорости заряда. Эта сила ненулевая только когда ток в тороиде меняется.

### 2.1.3 Сила, действующая на тороид

<sup>2</sup>«Собственный момент» заряда, ассоциируемый с векторным произведением  $\mathbf{E}_e \times \mathbf{B}_T$  как обычно предполагается, что он является частью механического момента заряда.

Магнитное поле  $\mathbf{B}_e$  на расстоянии  $r$  от заряда дается формулой:

$$\mathbf{B}_e = e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{ev\rho}{cr^3} \hat{\phi}, \quad (12)$$

в гауссовых единицах, где  $e$  - величина заряда,  $v$  - его скорость и  $\rho$  - расстояние от точки наблюдения до оси  $z$ . Это магнитное поле действует на ток  $I$  в тороиде вызывая силу в последнем

$$\mathbf{F}_T = \oint \frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_e = \frac{evI}{c^2} \oint dl_\rho \frac{\rho}{r^3} \hat{\mathbf{z}} \quad (13)$$

Обращаясь к фигуре выше, мы видим, что

$$dl_\rho = b \cos \alpha d\alpha, \quad \rho = a + b \sin \alpha \approx a, \quad R = \sqrt{z^2 + a^2}.$$

$$r = \sqrt{R^2 - 2bR \cos(\alpha + \beta) + b^2} \approx R[1 - \frac{b}{R} \cos(\alpha + \beta)], \quad \cos \beta = (z - b \cos \alpha)/r \approx z/R,$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T &\approx \frac{evI}{c^2} \int_0^{2\pi} b \cos \alpha d\alpha \frac{a}{R^3} \left( 1 + 3 \frac{b}{R} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{3evI\pi b^2}{c^2} \frac{az}{(z^2 + a^2)^{5/2}} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{ev}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_T}{\partial z}, \end{aligned} \quad (14)$$

что подтверждает уравнение (7). Эта сила ненулевая, пока ненулевые скорость заряда и ток в соленоиде.

### 2.1.4 Баланс момента в лабораторной системе

Сумма электромагнитных сил в системе есть

$$\mathbf{F}_T + \mathbf{F}_e = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_T}{\partial t} - \frac{ev}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_T}{\partial z} = -\frac{e}{c} \frac{d\mathbf{A}_T}{dt}, \quad (15)$$

где  $d/dt$  конвективная производная, действующая на заряд, согласно наблюдателю. Полная сила ненулевая, когда заряд движется и/или меняется ток в тороиде, в кажущемся нарушении 3-го закона Ньютона. Согласие с 3-м законом Ньютона восстанавливается, если мы обратимся к уравнению (8) для полевого момента системы, так что мы можем написать

$$\mathbf{F}_T + \mathbf{F}_e = -\frac{d\mathbf{P}_{\text{field}}}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{P}_{\text{field}}}{\partial t} - v \frac{\partial \mathbf{P}_{\text{field}}}{\partial z}, \quad (16)$$

отмечая, что полевой момент меняется как в изменением тока, так и с положением заряда. Тогда с использованием (1) и (2) мы видим, что полный момент системы постоянен во времени

$$\frac{d\mathbf{P}_T}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_e}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_{\text{field}}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{total}}}{dt} = 0. \quad (17)$$

### 2.1.5 "Скрытый" механический момент.

В то время как (17) есть удовлетворительное представление полного баланса момента, другой аспект в физике момента остается парадоксальным. А именно, если скорость заряда есть нуль и ток в тороиде постоянен, механические моменты  $\mathbf{P}_e$  и  $\mathbf{P}_T$  нулевые, но полевой момент  $\mathbf{P}_{\text{field}}$  в (8) не равен нулю. Если полный момент изолированной покоящейся системы равен нулю, в соответствие с обычными ожиданиями, должен быть дополнительный "скрытый" момент в системе, который равен и противоположен по знаку  $\mathbf{P}_{\text{field}}$ . Вопрос действительно ли полевой ЭМ момент соответствует некоторому "скрытому" механическому моменту, был рассмотрен Максвеллом в гл. 552 и 590 в [10], который чувствовал, что этот вопрос не ожеет быть решен в то время. Представляется, что Каллвик заключил, что полевой ЭМ момент, соответствующий току реально есть механический ммент движущихся зарядов, которые образуют токи (см. Гл. 18 [3]). Однако эта точка зрения не убеждает нас, что полный момент покоящейся изолированной системы есть нуль.

Наши сегодняшние представления в том, что эффективная масса заряда  $q$  меньше, если его потенциальная энергия выше, так что  $\Delta m_{\text{eff}} = -q\Phi/c^2$  согласно соотношению Эйнштейна об эквивалентности массы и энергии. Следуя дискуссии по этому эффекту Шокли [11] и Колемена и Ван Влека [12], Фарри [9] дал полезное выражение для "скрытого" механического момента  $\mathbf{P}_h$

$$\mathbf{P}_h = - \int \frac{\Phi \mathbf{J}}{c^2} d\text{Vol}. \quad (18)$$

Фарри отметил, что для уединенного заряда  $q$ ,  $\mathbf{J}d\text{Vol} \leftrightarrow q\mathbf{v}$ , так что "скрытый" механический момент, связанный с  $\Delta m_{\text{eff}}$  есть

$$d\mathbf{P}_h = -(q\Phi/c^2)\mathbf{v} \leftrightarrow -(\Phi \mathbf{J}/c^2) d\text{Vol}.$$

Сравнивая это с (3), мы видим, что

$$\mathbf{P}_h = -\mathbf{P}_{\text{field}}, \quad (19)$$

(а не  $+\mathbf{P}_{\text{field}}$  как утверждал Каллвик [3]), так что полный момент действительно равен нулю.

## 2.2. Анализ в системе, связанной с движущимся зарядом.

Преобразование от лабораторной к системе, связанной с зарядом едля малой скорости  $\mathbf{v}$  означает, что мы должны ожидать, что силы в обеих системах будут теми же самыми. Однако в системе покоящегося заряда этот заряд не создает магнитного поля, так что сила, действующая на тороид, равна нулю в этой системе отсчета, и потому галилеева инвариантность может нарушаться.

Разрешение этого аспекта парадокса Каллвика может быть найдено в релятивистском преобразовании плотностей заряда и тока, которые образуют 4-х вектор (ср,  $\mathbf{J}$ ). Мы рассмотрим только случай малых скоростей, так что

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1.$$

В лабораторной системе в тороиде не возникает плотности зарядар, но в системе заряда (для которого скорость  $\mathbf{v}$  в лабораторной системе), тороид приобретает ненулевую плотность заряда  $\rho'$

$$\rho' = \gamma \left( \rho - \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \approx -\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}}{c^2} = -\frac{vJ_z}{c^2}, \quad (20)$$

где ' обозначает, что величины берутся в системе заряда. Ток в лабораторной системе состоит из положительных и отрицательных плотностей заряда, которые равны и противоположны, но которые имеют разные скорости. При переходе к движущейся системе отсчета положительные и отрицательные плотности будут уже не равны друг другу и мы обнаружим некую нескомпенсированную плотность заряда (20) - см. параграф 86 по ссылке [13]. Так как плотность тока  $\mathbf{J}$  сосредоточена на поверхности тороида, объемная плотность заряда (20) может быть выражена в виде поверхностной плотности  $\sigma'$

$$\sigma' \approx \frac{vI}{2\pi a c^2} \sin \alpha, \quad (21)$$

где  $\alpha$  - угол, указанный на фигуре выше. Распределение заряда (21) на тороиде положительно для радиальных расстояний  $\rho > a$  и отрицательно для  $\rho < a$ , так что полный заряд на тороиде равен нулю в покоящейся системе (как и в лабораторной системе).

Заряд едействует электростатической силой на распределение заряда (21) на тороиде, и в свою очередь, это распределение заряда действует на заряд  $e$  (дополнительно в той силе, что возникает при изменении тока).

Для преобразований с малой скоростью, плотность тока неизменна, т.к.  $\rho = 0$  в лабораторной системе

$$\mathbf{J}' = \gamma (\mathbf{J}_{\parallel} - \rho \mathbf{v}) + \mathbf{J}_{\perp} \approx \mathbf{J}. \quad (22)$$

Теперь мы вычислим полевой момент  $\mathbf{P}'_{\text{field}}$  и силу  $\mathbf{F}'_{\text{T}}$  действующую на тороид и силу, действующую на заряд в системе заряда.

### 2.2.1 Полевой электромагнитный момент

Чтобы вычислить полевой электромагнитный момент, проще всего использовать первую форму (3). Единственный вектор-потенциал в системе - из-за тока на тороиде  $\mathbf{J}' \sim \mathbf{J}$ . Поэтому вектор-потенциал в этой системе есть

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}'_{\text{T}} \approx \mathbf{A}_{\text{T}}. \quad (23)$$

и полевой момент в ней<sup>3</sup>

$$\mathbf{P}'_{\text{field}} = \int \frac{\rho' \mathbf{A}'}{c} d\text{Vol}' \approx \frac{e \mathbf{A}_{\text{T}}}{c} = \mathbf{P}_{\text{field}}, \quad (24)$$

<sup>3</sup>Мы не включаем член  $\sigma' \mathbf{A}'_{\text{T}}/c\mathbf{v}$  (24), так как он подавляется множителем  $c^2$  в знаменателе

то есть тот же самый, как и в лабораторной системе. Этот результат иллюстрирует тот факт, что полевой момент, связанный с зарядами и токами, не преобразуется как пространственная компонента 4-х вектора энергии-момента (см. параграф 12.10 по ссылке [14])

Однако мы можем отнести полевой момент к 4-х вектору зарядовой-токовой плотности  $(\Phi, \mathbf{A})$ . В лабораторной системе потенциал  $\Phi_T$  тороида исчезает, так что преобразование 4-х вектора тороида в лабораторной системе к системе заряда есть

$$\Phi'_T = \gamma \left( \Phi_T - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_T}{c} \right) \approx -\frac{v}{c} A_{T,z}, \quad \mathbf{A}'_T = \gamma \left( \mathbf{A}_{T,\parallel} - \Phi_T \frac{\mathbf{v}}{c} \right) + \mathbf{A}_{T,\perp} \approx \mathbf{A}_T. \quad (25)$$

### 2.2.2 Сила, действующая на тороид

Электрическое поле  $\mathbf{E}'_e \sim \mathbf{E}_e = e\mathbf{r}/r^3$  (формула отличается от формулы оригинального текста, так как в данном случае  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор) с каким заряд действует с силой  $\mathbf{F}'_T$  на распределение зарядов  $\sigma'$  на тороиде в системе покоящегося заряда<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_T &= \int \sigma' \mathbf{E}'_e d\text{Area}' = \int \sigma' \frac{e\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\text{Area}' \\ &\approx \int_0^{2\pi} \frac{vI \sin \alpha e (\sin \beta \hat{\boldsymbol{\rho}} - \cos \beta \hat{\mathbf{z}})}{2\pi a c^2 R^2} \left( 1 + 2\frac{b}{R} \cos(\alpha + \beta) \right) 2\pi a b d\alpha. \end{aligned} \quad (26)$$

Сравнив с вычислениями в п. 2.1, мы видим, что фактор  $\cos \beta$  в (26) должен быть разложен до следующего порядка точности

$$\cos \beta = \frac{z - b \cos \alpha}{r} \approx \frac{z}{r} \approx \frac{z}{R} \left( 1 + \frac{b}{R} \cos(\alpha + \beta) \right). \quad (27)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_T &\approx \frac{vIb}{c^2 R^3} \int_0^{2\pi} \sin \alpha e (a \hat{\boldsymbol{\rho}} - z \hat{\mathbf{z}}) \left( 1 + 3\frac{b}{R} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \right) d\alpha \\ &\approx \frac{3evI\pi b^2}{c^2} \frac{az}{(z^2 + a^2)^{5/2}} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{ev}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_T}{\partial z} = \mathbf{F}_T. \end{aligned} \quad (28)$$

### 2.2.3. Сила, действующая на электрический заряд.

Сила  $\mathbf{F}'_e$  действующая на электрический заряд в сопутствующей системе от электрического поля  $\mathbf{E}'_{T,\text{ind}}$  возникающего тогда, когда меняется вектор-потенциал в точке нахождения заряда, а также из-за электрического поля, создаваемого поверхностной плотностью (20) -  $\mathbf{E}'_{T,\sigma}$ . Вектор-потенциал  $\mathbf{A}'_T$  – тот же самый в обеих системах, но в сопутствующей системе этот потенциал меняется из-за скорости тороида и из-за изменения тока. Поэтому сила, вызванная изменением вектор-потенциала тороида есть

<sup>4</sup>Более краткий аргумент будет следовать из уравнения (30)

$$\mathbf{F}'_{e,\text{ind}} = e\mathbf{E}'_{T,\text{ind}} = -\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'_T}{\partial t} - \frac{e}{c}(\mathbf{v}_T \cdot \nabla'_T)\mathbf{A}'_T = -\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_T}{\partial t} - \frac{ev}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_T}{\partial z}, \quad (29)$$

отмечая, что  $\nabla'_T = -\nabla'_e (= -\nabla_e)$

т.к. предыдущий оператор относится к координатам центра тороида, а последующий - к координатам заряда. Электростатическая сила действующая на заряд, равна и противоположна силе (26), действующей на тороид

$$\mathbf{F}'_{e,\sigma'} = \int e\mathbf{E}'_{T,\sigma'} d\text{Area}' = \int e\frac{-\sigma'\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\text{Area}' = -\mathbf{F}'_T = \frac{ev}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_T}{\partial z} = -e\nabla'_e\Phi'_T = -e\nabla_e\Phi'_T(0, 0, z), \quad (30)$$

где последний член относится к скалярному потенциалу тороида в системе заряда  $e$

Полная сила на заряд в системе заряда есть

$$\mathbf{F}'_e = -\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_T}{\partial t} = \mathbf{F}_e. \quad (31)$$

#### 2.2.4 Баланс момента в системе заряда.

Как только определяется, что в системе заряда движущийся тороид приобретает ненулевую поверхностную плотность, мы находим, что силы, действующие на заряд и на тороид, одинаковы в обеих системах. Также полевой момент тот же самый в обеих системах (что показывает, что  $\mathbf{P}'_{\text{field}}$  не ведет себя точно так как обычный момент во всех смыслах). Поэтому детали баланса моментов те же самые в обеих системах.

Сумма сил, действующих на заряд и на тороид в системе заряда есть

$$\mathbf{F}'_e + \mathbf{F}'_T = -\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_T}{\partial t} = -\frac{e}{c}\frac{d\mathbf{A}'_T}{dt} = -\frac{d\mathbf{P}'_{\text{field}}}{dt}, \quad (32)$$

так как частные и полные производные вектор-потенциала в точке нахождения заряда одинаковы в системе заряда. Соответственно, для полных изменений момента во времени

$$\frac{d\mathbf{P}'_e}{dt} + \frac{d\mathbf{P}'_T}{dt} + \frac{d\mathbf{P}'_{\text{field}}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}'_{\text{total}}}{dt} = 0. \quad (33)$$

Как и ожидалось, полный момент постоянный в системе заряда.

#### 2.2.5 "Скрытый" механический момент в системе заряда

Согласно предположению Фарри [9] "скрытый" механический момент в системе заряда может быть вычислен как<sup>5</sup>

$$\mathbf{P}'_h = - \int \frac{\Phi'_e \mathbf{J}'}{c^2} dVol' = -\mathbf{P}'_{\text{field}}. \quad (34)$$

Мы уже видели в уравнении (22), что  $\mathbf{J}' \approx \mathbf{J}$ . Соответственно, скалярный потенциал заряда в его системе тот же самый, как и лабораторной системе при  $v \ll c$ , так что  $\Phi'_e \approx \Phi_e$ . Поэтому

$$\mathbf{P}'_h \approx \mathbf{P}_h. \quad (35)$$

*Итак, "скрытый" механический момент не преобразуется при переходе от одной системы к другой, как обычный механический момент. "Скрытый" момент преобразуется как и полевой момент как 4-х вектор заряда-тока иначе, чем 4-х вектор энергии-момента. Поэтому обе эти концепции должны быть применены с осторожностью в задачах, в которых рассматривается преобразование между движущимися системами (см. [15])*

### 2.3 Поток энергии в индукционном ускорителе

В лабораторной системе заряд ускоряется электрическим полем  $\mathbf{E}_T$ , которое существует, когда меняется ток в тороиде. Мощность  $P$ , поглощаемая зарядом, есть

$$P = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v} = evE_T(0, 0, z) = -\frac{ev}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_T(0, 0, z) = -\frac{ev\dot{I}\pi b^2}{c} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (36)$$

Поток мощности от тороида к заряду описывается вектором Пойнтинга, или более точно, членом взаимодействия этого вектора

$$\mathbf{S}_{\text{int}} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_T \times \mathbf{V}_e + \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_e \times \mathbf{V}_T. \quad (37)$$

Было бы хорошо иметь график силовых линий вектора Пойнтинга, описываемого уравнением (37), на котором были бы показаны линии, исходящие от тороида и сходящиеся к заряду. Не обладая таким графиком, мы ограничим себя проверкой что полный поток вектора Пойнтинга через малую поверхность вокруг заряда и также пересекающую поверхность тороида, равен мощности  $P$  в уравнении (36)

Вначале мы рассмотрим цилиндрическую поверхность радиуса  $\rho$  и длины  $2l \gg \rho$  центрированную на заряде. Электрическое поле, создаваемое тороидом существенно однородно на его поверхности, так что  $\mathbf{E}_T \approx E_T(0, 0, z)$  и магнитное поле  $\mathbf{V}_e$  заряда дается уравнением (12). Вне соленоида магнитное поле  $\mathbf{V}_T$  исчезает, так что остается только первый член в (37). Мы можем пренебречь потоком Пойнтинга на концах малого цилиндра, т.к.  $\rho \ll l$ . Поэтому входящий поток Пойнтинга через поверхность цилиндра есть

<sup>5</sup>Мы пренебрегли вкладом  $\Phi'_e \mathbf{J}'/c^2$  в (34), так как он подавлен большой величиной  $c^2$  в знаменателе

$$\begin{aligned}
-\oint \mathbf{S}_{\text{int}} \cdot d\text{Area} &= -\frac{c}{4\pi} \oint \mathbf{E}_T \times \mathbf{B}_e \cdot d\text{Area} \approx -\frac{c}{4\pi} \int_{-l}^l E_T \hat{\mathbf{z}} \times \frac{ev\rho}{cr^3} \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot 2\pi\rho dz \hat{\boldsymbol{\rho}} \\
&\approx \frac{evE_T\rho^2}{2} \int_{-l}^l \frac{dz}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = evE_T \frac{l}{\sqrt{l^2 + \rho^2}} \rightarrow evE_T = P, \quad (38)
\end{aligned}$$

в пределе, когда  $\rho$  стремится к нулю.

Чтобы вычислить выходящий поток Пойнтинга через поверхность тороида, мы рассмотрим поверхность тороида непосредственно вне самого тороида, так что второй член в (37) опять может быть опущен. Электрическое поле  $\mathbf{E}_T$  возникает из-за изменения тока  $dI/dt$  текущего в петле радиуса  $b$  непосредственно вне тороида. Из закона Фарадея величина индуцированного  $E$  поля на поверхности тороида есть

$$E_T = -\frac{b\dot{B}_\phi}{2c} = -\frac{b\dot{I}}{ac} \quad (39)$$

подтверждающего, что  $\mathbf{B}\phi = 2I/ac$  внутри тороида. Магнитное поле заряда на тороиде имеет величину  $B_e = eva/c(z^2 + a^2)^{3/2}$

Векторное произведение  $[\mathbf{E}_T \times \mathbf{B}_e]$  направлено вдоль выходящей нормали к поверхности тороида. Поэтому полный выходящий поток Пойнтинга из тороида есть

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{S}_{\text{int}} \cdot d\text{Area} &= \frac{c}{4\pi} E_T B_e \text{Area} = -\frac{c}{4\pi} \frac{b\dot{I}}{ac} \frac{eva}{c(z^2 + a^2)^{3/2}} 2\pi a 2\pi b \\
&= -\frac{ev\dot{I}\pi b^2}{c} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = P. \quad (40)
\end{aligned}$$

### 3 References

- [1] N.C. Cristofilosetal., *HighCurrentLinearInductionAcceleratorforElectrons*, Rev. Sci. Instr. **35**, 585 (1964), [http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/accel/christofilos\\_rsi\\_35\\_885\\_64.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/accel/christofilos_rsi_35_885_64.pdf)
- [2] E.G. Cullwick, Nature **170**, 425 (1952), [http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/cullwick\\_nature\\_170\\_425\\_52.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/cullwick_nature_170_425_52.pdf)
- [3] E.G. Cullwick, *Electromagnetism and Relativity* (Longmans, Green & Co., London, 1959), pp. 232-238, [http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/cullwick\\_ER\\_59.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/cullwick_ER_59.pdf)
- [4] K.T.~McDonald, *Four Expressions for Electromagnetic Field Momentum*, (April 10, 2006), [http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/pem\\_forms.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/pem_forms.pdf)
- [5] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, Vol. 1, Series IX (Bernard Quaritch, London, 1839), [http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/faraday\\_exp\\_res\\_v1.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/faraday_exp_res_v1.pdf)
- [6] Secs. 22-24 and 57 of J.C. Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **155**, 459 (1865), [http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/maxwell\\_ptrsl-155\\_459\\_65.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/maxwell_ptrsl-155_459_65.pdf)
- [7] J.H. Poynting, *On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **175**, 343 (1884), [http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/poynting\\_ptrsl\\_175\\_343\\_84.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/poynting_ptrsl_175_343_84.pdf)
- [8] M. Abraham, *Prinzipien der Dynamik des Elektrons*, Ann. d. Phys. **10**, 105 (1903), [http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/abraham\\_ap\\_10\\_105\\_03.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/abraham_ap_10_105_03.pdf)
- [9] W.H. Furry, *Examples of Momentum Distributions in the Electromagnetic Field and in Matter*, Am. J. Phys. **37**, 621 (1969),

[http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/furry\\_ajp\\_37\\_621\\_69.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/furry_ajp_37_621_69.pdf)

[10] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd ed. (Clarendon Press, Oxford, 1892). The first edition appeared in

1873. [http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/maxwell\\_treatise\\_v2\\_92.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/maxwell_treatise_v2_92.pdf)

[11] W. Shockley and R.P. James, "Try Simplest Cases" *Discovery of "Hidden Momentum" Forces on Magnetic Currents*, Phys. Rev. Lett. **18**, 876 (1967),

[http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/shockley\\_prl\\_18\\_876\\_67.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/shockley_prl_18_876_67.pdf)

[12] S. Coleman and J.H. Van Vleck, *Origin of "Hidden Momentum" Forces on Magnets*, Phys. Rev. **171**, 1370 (1968),

[http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/coleman\\_pr\\_171\\_1370\\_68.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/coleman_pr_171_1370_68.pdf)

[13] R. Becker, *Electromagnetic Fields and Interactions* (Dover Publications, 1964).

[14] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (Wiley, 1999).

[15] V. Hnizdo, *Hidden momentum and the electromagnetic mass of a charge and current carrying body*, Am. J. Phys. **65**, 55 (1997),

[http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/hnizdo\\_ajp\\_65\\_55\\_97.pdf](http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/hnizdo_ajp_65_55_97.pdf)