

Martin R. Zirnbauer

# Elektrodynamik

3. Juli 1998

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York

London Paris Tokyo

Hong Kong Barcelona

Budapest

# Inhaltsverzeichnis

<b>0. Mathematische Grundlagen</b> .....	1
0.1 Euklidischer Raum .....	1
0.2 Linearformen .....	3
0.3 Alternierende Multilinearformen.....	6
0.4 Äußeres Produkt .....	9
0.5 Inneres Produkt .....	11
0.6 Zurückholen alternierender Multilinearformen.....	13
0.7 Hodgescher Sternoperator .....	14
0.8 Dichten.....	16
0.9 Vektorfelder und 1-Formen .....	17
0.10 Differentialformen .....	22
0.11 Cartan-Ableitung.....	24
0.12 Poincarésches Lemma .....	28
0.13 Pullback .....	30
0.14 Kurvenintegrale .....	33
0.15 Flächen- und Volumenintegrale im $E_3$ .....	38
0.16 Integration von Differentialformen .....	44
0.17 Allgemeiner Satz von Stokes .....	47
0.18 Lie-Ableitung .....	50
0.19 Stromformen und Stromlinien .....	52
0.20 Laplace-Operator.....	58
<b>1. Prinzipien des Elektromagnetismus</b> .....	63
1.1 Mathematischer Rahmen und Maßsystem.....	63
1.2 Axiom 1: Erhaltung der elektrischen Ladung.....	64
1.3 Konsequenzen der Ladungserhaltung: die inhomogenen Maxwell-Gleichungen .....	67
1.4 Axiom 2: Feldstärken und Kraftwirkung.....	71
1.5 Axiom 3: Induktionsgesetz (Erhaltung des magnetischen Flusses).....	74
1.6 Flußlinienbild .....	76
1.7 Axiom 4: Materialgesetze.....	80
1.8 Energiesatz .....	85
1.9 Anschlußbedingungen an Grenzflächen .....	86

1.10	Elektrodynamik in Materie .....	93
1.11	Flußlinien .....	98
<b>2.</b>	<b>ElektroMagnetostatik</b> .....	<b>101</b>
2.1	Elementare Anwendungen .....	102
2.1.1	Elektrostatik: Kugelkondensator .....	102
2.1.2	Magnetostatik: Messung von $\mu_0$ .....	104
2.2	Poisson-Gleichung .....	107
2.2.1	Elektrostatik .....	107
2.2.2	Magnetostatik .....	109
2.3	Multipolentwicklung (kartesisch) .....	113
2.3.1	Elektrostatik .....	113
2.3.2	Magnetostatik .....	114
2.4	Randwertaufgaben .....	117
2.4.1	Die Greenschen Identitäten .....	117
2.4.2	Elektrostatik: Poisson- und Dirichlet-Problem .....	117
2.4.3	Magnetostatik: Abschirmung durch Supraströme .....	122
2.5	Energiebetrachtungen .....	122
2.5.1	Kapazitätskoeffizienten .....	122
2.5.2	Induktionskoeffizienten .....	125
2.6	ElektroMagnetostatik mit Stromformen .....	128
<b>3.</b>	<b>Netzwerke</b> .....	<b>133</b>
3.1	k-Komplexe .....	133
3.2	Kapazitive und resistive Netzwerke .....	136
3.2.1	Kapazitives Netzwerk .....	136
3.2.2	Resistive Netzwerke .....	140
3.3	Diskretisierung der Maxwell'schen Theorie .....	144
3.3.1	Homogene Maxwell-Gleichungen .....	144
3.3.2	Inhomogene Maxwell-Gleichungen .....	145
3.3.3	Materialgleichungen .....	145
3.4	Flußlinien .....	147
3.5	Dynamik (diskret) .....	151
<b>4.</b>	<b>Elektromagnetische Wellen</b> .....	<b>157</b>
4.1	Wellengleichungen für $B$ , $D$ , $H$ und $E$ .....	157
4.2	Ebene Wellen .....	159
4.2.1	Ein Beispiel für Pulserzeugung .....	159
4.2.2	Skin-Effekt .....	161
4.2.3	Brechung an ebenen Grenzflächen .....	162
4.2.4	Lösung der inhomogenen Wellengleichung .....	162
4.3	Wellengleichung in drei Raumdimensionen .....	164
4.3.1	Lösung der homogenen Gleichung .....	164
4.3.2	Abruptes Abschalten eines Kreisstroms .....	168
4.3.3	Lösung der inhomogenen Gleichung .....	169

4.4	Elektrische Dipolstrahlung .....	170
4.5	Strahlung einer beschleunigten Punktladung .....	173
4.6	Beugungsphänomene .....	174
4.7	Symmetrien und Erhaltungssätze .....	174
4.8	Das Feynmansche Paradoxon .....	174
4.9	Geometrische Optik .....	178
<b>5.</b>	<b>Relativistisch kovariante Theorie .....</b>	<b>179</b>
5.1	Der Minkowski-Raum $M_4$ .....	179
5.2	Die Poincaré-Gruppe .....	180
5.3	Äußerer Kalkül auf $M_4$ .....	181
5.4	Kovariante Formulierung der Theorie .....	181
5.5	Invarianzeigenschaften der Maxwellschen Theorie .....	183
5.6	Anschauliche Deutung mittels Stromformen .....	183
5.7	Altes relativistisch aufgewärmt .....	184
5.8	Transformationsverhalten der Felder und Ströme .....	186
5.8.1	Transformation des Viererstroms .....	186
5.8.2	Transformation der Felder .....	187
5.8.3	Aharonov-Casher-Effekt .....	188
5.9	Erhaltungssätze .....	188
<b>6.</b>	<b>Wirkungsprinzip für klassische Feldtheorien .....</b>	<b>191</b>
6.1	Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik .....	193
6.2	Erhaltene Ströme .....	194
6.3	Ginzburg-Landau-Theorie .....	195
6.4	Abelsches Higgs-Modell .....	199
6.5	Quanten-Halleffekt und Chern-Simons-Wirkung .....	202
<b>A.</b>	<b>Kleine Formelsammlung für das Rechnen mit Differential-</b>	
	<b>formen .....</b>	<b>205</b>

# 0. Mathematische Grundlagen

## 0.1 Euklidischer Raum

*Perspektive.* Zur Formulierung der Elektrodynamik benötigen wir ein mathematisches Modell der physikalischen Raum-Zeit. In der ersten Hälfte dieser Vorlesung behandeln wir die Zeit separat vom Raum und modellieren den physikalischen Raum durch den dreidimensionalen Euklidischen Raum  $E_3$ . In der zweiten Hälfte werden wir dann zum Zweck der relativistisch kovarianten Formulierung der Elektrodynamik zu einer einheitlichen Beschreibung von Raum und Zeit übergehen und die physikalische Raum-Zeit durch den vierdimensionalen Minkowski-Raum  $M_4$  modellieren. (Wir wollen hier nur erwähnen, ohne darauf weiter einzugehen, daß das Minkowski-Modell adäquat ist, solange die raumkrümmenden Effekte der Gravitation vernachlässigt werden können.) Beiden Modellen,  $E_3$  und  $M_4$ , liegt der Begriff eines affinen Raumes zugrunde.

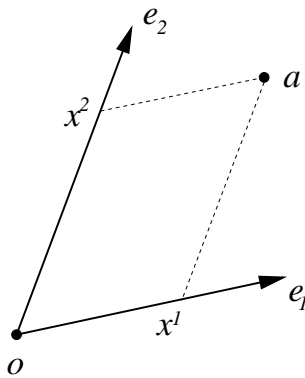
*Der  $n$ -dimensionale affine Raum  $A_n$ .* Der Begriff des „Vektorraumes“ (oder linearen Raumes) wird als bekannt vorausgesetzt, und wir erinnern nur daran, daß die „Vektoren“ genannten Elemente eines solchen Raumes addiert und mit reellen Zahlen multipliziert werden können. Per Definition besteht nun ein affiner Raum nicht aus Vektoren, sondern aus *Punkten*, und die letzteren lassen sich nicht sinnvoll addieren. Ein affiner Raum ist also kein Vektorraum, obwohl er zu einem solchen in enger Beziehung steht. Jedem Paar von Punkten  $a$  und  $b$  eines affinen Raumes ist nämlich in eindeutiger Weise ein Vektor zugeordnet. Außerdem ist es möglich, zu einem Punkt  $a$  eines affinen Raumes einen Vektor  $v$  zu addieren, was einen neuen Punkt  $b = a + v$  zum Resultat hat. Die Operation des Addierens von Vektoren zu Punkten ist assoziativ und führt einen Punkt nur dann in sich über, wenn der hinzugefügte Vektor der Nullvektor ist. Diesen Sachverhalt fassen wir in der folgenden Definition zusammen: ein *affiner Raum*  $A$  ist ein Tripel  $(M, V, +)$ , bestehend aus einer Punktmenge  $M$ , einem reellen Vektorraum  $V$  und einer Addition  $+ : M \times V \rightarrow M$ ,  $(a, v) \mapsto a + v$  mit den Eigenschaften

- (1)  $a + (v + w) = (a + v) + w \quad (a \in M; v, w \in V)$ ,
- (2)  $a + v = a \iff v = 0 \quad (a \in M; v \in V)$ ,
- (3) zu jedem Paar  $a, b \in M$  existiert ein  $v \in V$  mit  $b = a + v$ .

Der nach (2) eindeutige Vektor  $v$  von (3) heißt der „Differenzvektor“ von  $a$  und  $b$  und wird mit  $b - a$  bezeichnet. Für  $V = \mathbb{R}^n$  ist  $A = (M, V, +)$  der  $n$ -dimensionale affine Raum  $A_n$ .

*Aufgabe 0.1.1.* Gegeben sei ein Tripel von Punkten  $a, b, c \in M$ . Deduzieren Sie aus den Axiomen (1)-(3) die Beziehung  $c - a = (c - b) + (b - a)$ .

Unter der *Geraden durch  $a$  in Richtung von  $v$*  versteht man die Menge von Punkten der Form  $a + sv$  mit beliebigem  $s \in \mathbb{R}$ . Der von  $m$  Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  aufgespannte *Spat* mit Basispunkt  $p$  ist die Punktmenge  $\{a | a = p + \sum_{i=1}^m t_i v_i\}$  für  $0 \leq t_1, \dots, t_m \leq 1$ . Für  $m = 2$  sprechen wir auch von einem *Parallelogramm*. Ein *affines Koordinatensystem* ist eine Gesamtheit  $(o; e_1, e_2, \dots, e_n)$ , bestehend aus einem ausgewählten Punkt  $o \in M$  („Koordinatenursprung“) und  $n$  linear unabhängigen Elementen  $e_1, \dots, e_n$  von  $V$ . Die durch  $a - o = \sum_{i=1}^n x^i e_i$  einem Punkt  $a \in M$  zugeordneten Zahlen  $x^1, \dots, x^n$  heißen *affine Koordinaten* von  $a$  bezüglich  $(o; e_1, \dots, e_n)$ . Eine *affine Abbildung*  $\alpha : M \rightarrow M$  bildet Geraden auf Geraden ab.



**Abbildung 0.1.** Affines Koordinatensystem  $(o; e_1, e_2)$  und affine Koordinaten  $x^1, x^2$  eines Punktes  $a \in A_2$ .

*Aufgabe 0.1.2.* Zeigen Sie, daß jede affine Abbildung  $\alpha$  sich in der Form

$$\alpha(p) = \alpha(o) + L(p - o)$$

ausdrücken läßt, wobei  $o$  ein beliebig gewählter Referenzpunkt und die Abbildung  $L : V \rightarrow V$  linear ist.

*Euklidischer Vektorraum.* Der Differenzvektorraum  $V$  eines affinen Raumes hat zu wenig Struktur, als daß es möglich wäre, Längen von Vektoren oder von Vektoren eingeschlossene Winkel zu messen. Diese Möglichkeit wird erst durch die Einführung eines positiv definiten Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eröffnet. Ein Vektorraum  $V$  mit positiv definitem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt *Euklidischer Vektorraum*. Die Länge  $|v|$  eines Vektors  $v$  ist in diesem Fall erklärt durch  $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  und der Winkel  $\theta(u, v)$  zwischen zwei Vektoren  $u$  und  $v$  durch  $\cos \theta(u, v) = \langle u, v \rangle / |u||v|$ .

Der  $n$ -dimensionale Euklidische Raum  $E_n$ . Unter einem *Euklidischen Raum*  $E$  versteht man einen affinen Raum  $A$ , dessen Differenzvektorraum  $V$  die zusätzliche Struktur eines Euklidischen Vektorraums hat. Der Abstand  $d(a, b)$  zweier Punkte  $a, b \in M$  wird durch  $d(a, b) = |b - a|$  erklärt. Der  $n$ -dimensionale Euklidische Raum wird mit  $E_n$  bezeichnet. Ein *kartesisches Koordinatensystem* von  $E_n$  ist ein affines Koordinatensystem  $(o; e_1, \dots, e_n)$  mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß die Vektoren  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis bilden:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Hierbei ist  $\delta_{ij}$  Kroneckers Delta-Symbol, d.h.  $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$ , und  $\delta_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ . Sind  $x^i$  und  $y^i$  die Koordinaten von  $a \in M$  und  $b \in M$  bezüglich eines solchen Systems, dann gilt:

$$d(a, b) = |(b - o) - (a - o)| = \left| \sum_{i=1}^n (x^i - y^i) e_i \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}.$$

Da  $d(a, b)$  von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, folgt dasselbe für  $\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2$ .

*Euklidische Bewegungen.* Sei  $E$  ein Euklidischer Raum und  $\psi : E \rightarrow E$  eine affine Abbildung. Wir nennen  $\psi$  eine *Euklidische Bewegung*, wenn für jedes Paar  $a, b \in E$  gilt

$$|\psi(a) - \psi(b)| = |a - b|.$$

Euklidische Bewegungen lassen also den Abstand zwischen Punkten ungeändert. Aus der Behauptung von Aufgabe 0.1.2 folgt, daß jede Euklidische Bewegung in der Form

$$\psi(a) = \psi(o) + R(a - o)$$

ausgedrückt werden kann, wobei die lineare Abbildung  $R : V \rightarrow V$  der Orthogonalitätsbedingung  $\langle Rv_1, Rv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$  unterliegt. Der Spezialfall  $R = \text{id}$  heißt *Translation*, für  $\psi(o) = o$  liegt eine *Rotation* mit Fixpunkt  $o$  vor.

## 0.2 Linearformen

Hier und im folgenden bezeichne  $V$  immer einen Vektorraum der Dimension  $n$  über dem reellen Zahlenkörper  $\mathbb{R}$ . Eine *Linearform*  $\alpha$  auf  $V$  ist eine lineare Abbildung, die jedem Element von  $V$  eine reelle Zahl zuweist. In Formeln schreiben wir

$$\begin{aligned} \alpha : V &\rightarrow \mathbb{R}, \\ v &\mapsto \alpha(v), \end{aligned}$$

d.h. wir bezeichnen die  $v \in V$  durch  $\alpha$  zugewiesene Zahl mit  $\alpha(v)$ . Linearität der Abbildung bedeutet, daß für alle  $u, v \in V$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

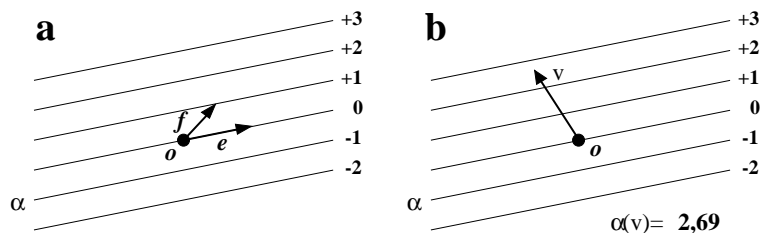
$$\alpha(xu + yv) = x\alpha(u) + y\alpha(v).$$

Linearformen lassen sich wie Vektoren in natürlicher Weise addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(v) &:= \alpha(v) + \beta(v), \\ (x\alpha)(v) &:= x\alpha(v).\end{aligned}$$

Sie bilden also ihrerseits einen linearen Raum, den sogenannten „Dualraum“ von  $V$ , den wir mit  $L(V, \mathbb{R})$  oder kürzer mit  $V^*$  bezeichnen. Man sieht leicht, daß  $V^*$  die gleiche Dimension wie  $V$  hat. Damit ist schon alles gesagt, was es an dieser Stelle über Linearformen zu wissen gibt, und wir könnten jetzt im Prinzip sofort zu Abschn. 0.3 übergehen. Für manche Zwecke ist es aber hilfreich, mit dem abstrakten Begriff der Linearform eine anschauliche Vorstellung verbinden zu können.

*Graphische Veranschaulichung.* Nach obiger Definition setzt der Begriff der Linearform einen reellen Vektorraum  $V$  voraus *und sonst nichts*. Um den Begriff der Linearform graphisch zu veranschaulichen, ist es jedoch günstig,  $V$  als den Differenzvektorraum eines affinen Raumes  $A = (M, V, +)$  zu interpretieren, was wir hier tun wollen. Ein Vektor  $v \in V$  läßt sich dann als ein Pfeil auffassen, der zwei Punkte von  $M$  miteinander verbindet. Addition zweier Vektoren  $u$  und  $v$  erfolgt in diesem Bild dadurch, daß man den Schaft des Pfeils von  $v$  durch Parallelverschiebung an die Spitze des Pfeils von  $u$  setzt.<sup>1</sup> Der Summenvektor  $u + v$  ist dann derjenige Pfeil, der vom Schaft von  $u$  zur Spitze von  $v$  zeigt. Dieser nützlichen Veranschaulichung des Vektorbegriffs und der Addition von Vektoren entspricht eine Vorstellung von Linearformen, die in Abb. 0.2 illustriert ist.



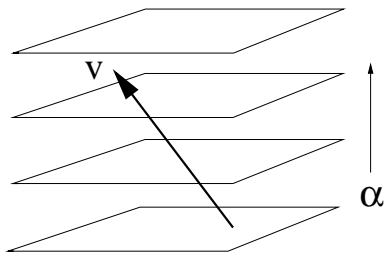
**Abbildung 0.2.** Affines Modell einer Linearform

Abb. 0.2 entsteht auf die folgende Weise. Wir geben uns einen Punkt  $o$  und einen Vektor  $e$  vor und zeichnen die Gerade durch  $o$  in Richtung von  $e$ . Diese Gerade nennen wir die „Nullgerade“. Nun nehmen wir einen zweiten, von  $e$  linear unabhängigen Vektor  $f$ , bringen den Schaft von  $f$  durch Parallelverschiebung auf irgendeinen Punkt (z.B.  $o$ ) der Nullgeraden und zeichnen die Gerade durch die Spitze von  $f$  in Richtung von  $e$ . Dann schieben wir

<sup>1</sup> Parallelverschiebung beruht auf der algebraischen Relation  $b+v = a+v+(b-a)$ .



den Schaft von  $f$  auf einen Punkt der so entstandenen „Einsgeraden“ und legen durch die Spitze von  $f$  wiederum eine Gerade in Richtung von  $e$ . Diesen Prozeß setzen wir fort und produzieren auf diese Weise eine Schar durchnummerierter und paralleler Geraden, die wir mit  $\alpha$  bezeichnen (Abb. 0.2a). Nach dieser vorbereitenden Konstruktion wählen wir nun irgendeinen Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  und bringen seinen Schaft (wiederum durch Parallelverschiebung) auf die Nullgerade (Abb. 0.2b). Die Spitze von  $v$  wird dann im allgemeinen nicht auf einer der gezeichneten Geraden liegen, sondern auf einer gedachten Zwischengeraden, deren „Nummer“ durch lineare Interpolation bestimmbar ist; in Abb. 0.2b wäre dies ungefähr die Gerade 2,69. Durch die Geradenschar  $\alpha$  wird also dem Vektor  $v$  die reelle Zahl 2,69 eindeutig zugeordnet. Eine solche Zuordnung existiert offensichtlich nicht nur für  $v$  sondern für jedes Element des  $\mathbb{R}^2$ . Die Geradenschar  $\alpha$  definiert folglich eine Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$ , und diese Abbildung ist per Konstruktion von  $\alpha$  linear. Mit anderen Worten, die Geradenschar von Abb. 0.2 veranschaulicht in graphischer Weise ein Element  $\alpha$  von  $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Ganz analog kann man sich die Elemente von  $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  als Scharen paralleler Ebenen im dreidimensionalen affinen Raum, und allgemein die Elemente von  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  als Scharen von  $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperebenen im  $n$ -dimensionalen affinen Raum, vorstellen.



**Abbildung 0.3.** Modell einer Linearform  $\alpha \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ . Der Wert von  $\alpha(v)$  wird festgestellt, indem man die von  $v$  durchstoßenen Ebenen von  $\alpha$  abzählt und linear interpoliert. Der Pfeil von  $\alpha$  legt die positive Zählrichtung fest.

*Beispiel 0.2.1.* In den Kursen für Physik-Anfänger wird die physikalische Größe „Kraft“ üblicherweise als Vektor eingeführt. In der Tat ist in einem Euklidischen Raum jedem Kraftfeld eindeutig ein Vektorfeld zugeordnet. Jedoch läßt sich der Begriff „Kraft“ bereits auf einem affinen Raum, d.h. vor Einführung eines Skalarprodukts mit Sinn erfüllen. Ein konservatives Kraftfeld wird nämlich vollständig charakterisiert durch die *Arbeit*, die aufzubringen ist, um einen Körper von einem Punkt zu einem anderen zu transportieren. Für ein *homogenes* Kraftfeld hängt diese Arbeit nur vom Differenzvektor der beiden Punkte ab, nicht aber von ihrer individuellen Position. Bewegt man den Körper zunächst von  $a$  nach  $b$  und dann von  $b$  nach  $c$ , so setzen sich die Arbeiten linear zusammen. Ein homogenes Kraftfeld läßt sich also als eine lineare Abbildung auffassen, die jedem (Verschiebungs-)Vektor die Arbeit zuordnet, die beim Verschieben eines Körpers vom Schaft bis zur Spitze des

betreffenden Vektors aufzubringen ist. Kurz gesagt, ein homogenes Kraftfeld ist eine Linearform.

*Beispiel 0.2.2.* Es sei hier betont, daß die Definition des Begriffs der Linearform kein Skalarprodukt erfordert. Für dieses zweite Beispiel wollen wir aber den Vektorraum  $V$  dennoch mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  versehen. Auf  $V$  lassen sich dann Linearformen dadurch erzeugen, daß man in das erste (oder das zweite) Argument des Skalarprodukts permanent einen fest gewählten Vektor einsetzt:  $\alpha = \langle v, \cdot \rangle$ . Ist speziell  $v = e$  ein Vektor der Länge Eins, dann entspricht die Linearform  $\alpha = \langle e, \cdot \rangle$  für  $V = \mathbb{R}^2$  einer Geradenschar im  $E_2$  mit der Eigenschaft, daß die Geraden der Schar auf  $e$  senkrecht stehen und Abstand Eins haben.

*Basisdarstellung.* Sei  $e_1, e_2, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$ . Die sogenannte "Dualbasis"  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$  von  $V^*$  wird eindeutig festgelegt durch die Forderung

$$\theta^i(e_j) = \delta_j^i \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

wobei  $\delta_j^i$  Kroneckers Delta-Symbol ist. Für den Fall  $n = 2$  werden Basis und zugehörige Dualbasis in Abb. 0.4 graphisch veranschaulicht. Sind ein Vektor  $v$  und eine Linearform  $\alpha$  in Basisdarstellung durch  $v = \sum_i v^i e_i$  und  $\alpha = \sum_i \alpha_i \theta^i$  gegeben, so folgt aus der Definition der Dualbasis sofort

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v^i.$$

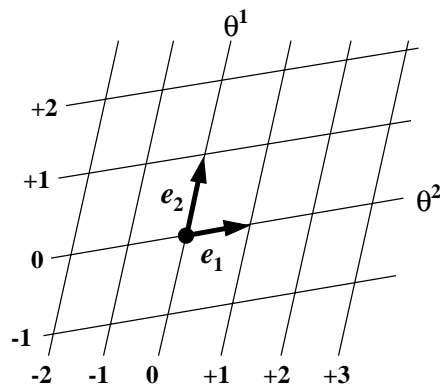


Abbildung 0.4. Basis und Dualbasis

### 0.3 Alternierende Multilinearformen

In Abschn. 0.2 haben wir Linearformen als lineare Abbildungen eines Vektorraums in die reellen Zahlen kennengelernt. Solche Abbildungen können

wir uns auch als „Maschinen“ vorstellen, die einen Eingabeschlitz für Vektoren haben und auf die Eingabe eines Vektors mit der Ausgabe einer reellen Zahl antworten. Wir nehmen nun eine Verallgemeinerung vor und betrachten Maschinen mit nicht nur einem sondern  $k$  Eingabeschlitzen ( $k \geq 1$ ) für Elemente eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes  $V$ . Wie zuvor seien die Maschinen so konstruiert, daß sie die Eingabe von  $k$  Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_k$  mit der Ausgabe einer reellen Zahl quittieren. Den von der Maschine  $\alpha$  ausgegebenen Wert bezeichnen wir mit  $\alpha(v_1, v_2, \dots, v_k)$ . Wir stellen zwei zusätzliche Forderungen an unsere Maschinen. Erstens sollen sie in allen Argumenten linear sein. In Formeln heißt das:

$$\begin{aligned}\alpha(xu + yv, w, \dots) &= x\alpha(u, w, \dots) + y\alpha(v, w, \dots) \\ \alpha(u, xv + yw, \dots) &= x\alpha(u, v, \dots) + y\alpha(u, w, \dots) \quad \text{usw.}\end{aligned}$$

(Hierbei sind  $u, v, w \in V$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ .) Zweitens verlangen wir die Eigenschaft des „Alternierens“, d.h. wenn wir die Eingabe durch Austausch zweier Argumente abändern, dann soll die ausgegebene reelle Zahl dem Betrag nach gleichbleiben aber ihr Vorzeichen wechseln. In Formeln:

$$\alpha(\dots, u, \dots, v, \dots) = -\alpha(\dots, v, \dots, u, \dots).$$

Nichttriviale Maschinen mit der zweiten Eigenschaft existieren nur für  $k \leq n$ .

Abbildungen vom beschriebenen Typ heißen *alternierende Multilinearformen vom Grad  $k$*  oder etwas kürzer „alternierende  $k$ -lineare Formen“. Solche Abbildungen lassen sich in natürlicher Weise addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren. Sie bilden also ebenfalls einen linearen Raum, den wir mit  $\text{Alt}^k(V)$  bezeichnen.

*Beispiel 0.3.1.* Wir bezeichnen die Komponenten eines Vektors  $u$  in  $V = \mathbb{R}^3$  bezüglich einer fest gewählten Basis  $e_1, e_2, e_3$  mit  $u^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und die Komponenten der Vektoren  $v, w$  entsprechend mit  $v^i$  bzw.  $w^i$ . Die durch

$$\Omega(u, v, w) = \text{Det} \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

definierte Abbildung  $\Omega$  ist 3-linear und alternierend und ist folglich ein Element von  $\text{Alt}^3(V)$ .

*Beispiel 0.3.2.* Die  $xy$ -Ebene durch den Koordinatenursprung des dreidimensionalen Euklidischen Raums werde von zwei orthormalen Basisvektoren  $e_x$  und  $e_y$  aufgespannt.  $\omega$  sei die alternierende 2-lineare Form, die jedem Paar von Vektoren  $u$  und  $v$  in  $\mathbb{R}^3$  die reelle Zahl

$$\omega(u, v) = \langle e_x, u \rangle \langle e_y, v \rangle - \langle e_x, v \rangle \langle e_y, u \rangle$$

zuweist. Der Absolutbetrag von  $\omega(u, v)$  ist dann die Fläche der Projektion eines von  $u$  und  $v$  aufgespannten Parallelogramms auf die  $xy$ -Ebene.

*Aufgabe 0.3.1.* Weisen Sie nach, daß der Raum  $\text{Alt}^k(V)$  für maximalen Grad  $k = \dim V$  eindimensional ist.

*Orientierung.* Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine fest gewählte, geordnete Basis von  $V$ . Die Anwendung eines von Null verschiedenen Elements  $\Omega \in \text{Alt}^n(V)$  auf  $e_1, \dots, e_n$  resultiert in einer reellen Zahl  $\Omega(e_1, \dots, e_n)$ , die entweder positiv oder negativ ist. Auf diese Weise wird der eindimensionale Raum  $\text{Alt}^n(V)$  in zwei Äquivalenzklassen eingeteilt, eine positive und eine negative Klasse. Umgekehrt legt die Wahl eines Elements  $\Omega \in \text{Alt}^n(V)$  ( $\Omega \neq 0$ ) eine Einteilung in positive und negative Systeme von Basisvektoren  $e_1, \dots, e_n$  fest. Diese Einteilung hängt nur von der  $\Omega$  enthaltenden Äquivalenzklasse ab, nicht aber von  $\Omega$  selbst. Durch die Entscheidung für eine der beiden Äquivalenzklassen wird, wie man sagt, eine *Orientierung* bestimmt. Im  $\mathbb{R}^3$  fixiert man die Orientierung üblicherweise durch die sogenannte *Rechte-Hand-Regel*. Danach heißt ein System von linear unabhängigen Vektoren  $u, v, w$  rechtshändig oder positiv orientiert, wenn sich die Vektoren mit Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand (in der angegebenen Reihenfolge) zur Deckung bringen lassen. Andernfalls heißt das System linkshändig oder negativ orientiert.

*Graphische Veranschaulichung.* Nach Abschn. 0.2 lassen sich Linearformen  $\alpha \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  als Scharen paralleler Ebenen im affinen Raum  $A_3$  darstellen. In analoger Weise können wir auch alternierende Multilinearformen höheren Grades veranschaulichen. Zum Beispiel dient als affines Modell eines Elements  $\omega \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  eine homogene Schar paralleler Geraden mit Schraubensinn (Abb. 0.5a). Um den Wert  $\omega(u, v)$  auf zwei Vektoren  $u$  und  $v$  zu ermitteln, zählen wir ab, wieviele Geraden der Schar ein Parallelogramm mit den Basisvektoren  $u$  und  $v$  schneiden (der Basispunkt des Parallelogramm ist beliebig) und interpolieren linear. Die Schnittpunkte zählen wir als positiv (bzw. negativ), wenn der Schraubensinn der Geraden mit der Orientierung der Vektoren  $u, v$  übereinstimmt (bzw. nicht übereinstimmt). Durch die Berücksichtigung des Schraubensinns wird gewährleistet, daß der Wert  $\omega(u, v)$  unter Austausch von  $u$  und  $v$  sein Vorzeichen wechselt.

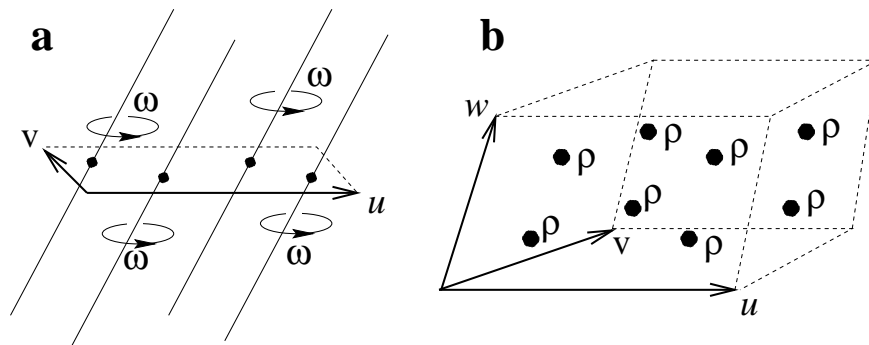


Abbildung 0.5. Modelle ... Modelle

Im Falle einer alternierenden 3-linearen Form  $\rho \in \text{Alt}^3(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  verwenden wir zur Veranschaulichung ein System von Gitterpunkten. Die Punkte sind nicht strukturlos, sondern tragen eine Orientierung. Der Absolutwert von  $\rho(u, v, w)$  wird der Zahl der in einem Spat mit Kantenvektoren  $u, v$  und  $w$  befindlichen Gitterpunkte gleichgesetzt. (Auch hier muß linear interpoliert werden, und die genaue Position der Basis des Spats ist dann wieder irrelevant). Stimmt die Orientierung der Punkte mit der Orientierung des Systems von Vektoren überein, so ist das Vorzeichen von  $\omega(u, v, w)$  positiv, andernfalls negativ.

## 0.4 Äußeres Produkt

*Perspektive.* In den folgenden Abschnitten werden wir vier mathematische Operationen kennenlernen, die auf dem Raum der alternierenden Multilinearformen agieren: das äußere Produkt, das innere Produkt, das Zurückholen von Formen, und den Hodgeschen Sternoperator. Die ersten drei Operationen setzen keine metrische Struktur voraus.

*Äußeres Produkt von Linearformen.* Gegeben seien zwei Linearformen  $\alpha, \beta \in L(V, \mathbb{R})$ . Unter ihrem äußeren Produkt  $\alpha \wedge \beta$  verstehen wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (u, v) &\mapsto (\alpha \wedge \beta)(u, v) := \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear in beiden Argumenten und alternierend. Folglich gilt:  $\alpha \wedge \beta \in \text{Alt}^2(V)$ .

*Beispiel 0.4.1.* Wir betrachten den Euklidischen Vektorraum  $V = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit Orthonormalbasis  $e_1, e_2$  und Flächenform

$$\omega(u, v) = \langle e_1, u \rangle \langle e_2, v \rangle - \langle e_1, v \rangle \langle e_2, u \rangle = u_1 v_2 - v_1 u_2.$$

Mit der Definition<sup>2</sup>  $\vartheta_i = \langle e_i, \cdot \rangle$  ( $i = 1, 2$ ) können wir schreiben  $\omega = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$ .

*Aufgabe 0.4.1.* Zeige, daß der Ausdruck  $\vartheta_1 \wedge \vartheta_2$  unter eigentlichen Drehungen von  $V$  invariant ist.

**Visualisiere Linearformen im dreidimensionalen Raum als Ebenenscharen. Das äußere Produkt der Linearformen entspricht dann der Schnittmenge der Ebenenscharen (einer Schar von Geraden).**

<sup>2</sup> In einem Euklidischen Vektorraum mit Orthonormalbasis  $e_i$  gilt  $\vartheta_i(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \theta^i(e_j)$  (wie immer sind  $\theta^i$  die Elemente der Dualbasis). Dagegen ist in einem nicht-Euklidischen Vektorraum wie z.B. dem Lorentzraum der speziellen Relativitätstheorie zwischen  $\vartheta_i$  und  $\theta^i$  zu unterscheiden.

*Äußeres Produkt alternierender Multilinearformen.* Allgemein versteht man unter dem äußeren Produkt zweier Elemente  $\alpha \in \text{Alt}^k(V)$  und  $\beta \in \text{Alt}^l(V)$  ( $k, l \geq 1$ ) die durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}, v^{(k+1)}, \dots, v^{(k+l)}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) \alpha(v^{(\pi(1))}, \dots, v^{(\pi(k))}) \beta(v^{(\pi(k+1))}, \dots, v^{(\pi(k+l))})$$

definierte Abbildung  $\alpha \wedge \beta \in \text{Alt}^{k+l}(V)$ , wobei die Summe über alle Permutationen  $\pi$  der Indexmenge  $1, 2, \dots, k+l$  läuft und  $\text{sign}(\pi)$  das Signum von  $\pi$  ist. Das so definierte Produkt hat die Eigenschaften

- (1)  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$ ,
- (2)  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ .

*Aufgabe 0.4.2.* Beweise die Super-Kommutativität (1) und die Assoziativität (2) des äußeren Produkts!

Eine sofortige Konsequenz von (1) ist  $\alpha \wedge \alpha = -\alpha \wedge \alpha = 0$  für  $\alpha \in \text{Alt}^{2l+1}(V)$ . Für den Spezialfall  $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in V$  und  $\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(k)} \in V^*$  gilt:

$$(\alpha_{(1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{(k)})(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{(1)}(v^{(1)}) & \dots & \alpha_{(1)}(v^{(k)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(k)}(v^{(1)}) & \dots & \alpha_{(k)}(v^{(k)}) \end{pmatrix}.$$

Es ist zweckmäßig, das äußere Produkt  $\alpha \wedge \beta$  auch für den Fall zu erklären, daß  $\alpha$  und/oder  $\beta$  reelle Zahlen sind. Wir vereinbaren, daß  $\wedge$  in diesem Fall mit der gewöhnlichen Multiplikation zusammenfällt. Zum Zweck der bequemen Notation später einzuführender Operatoren definieren wir  $\text{Alt}^1(V) = V^*$  und  $\text{Alt}^0(V) = \mathbb{R}$ .

*Beispiel 0.4.2.* Im orientierten  $E_3$  sei eine alternierende 3-lineare Form  $\Omega$  dadurch erklärt, daß einem Tripel von Vektoren  $u, v, w$  das Volumen eines von ihnen aufgespannten Spats zugewiesen wird. Hierbei zählen wir das Volumen positiv (bzw. negativ), wenn  $u, v, w$  ein rechtshändiges (bzw. linkshändiges) System bilden.  $\Omega$  heißt Volumenform. Wenn wir wie oben eine Basis von Linearformen  $\vartheta_i$  auf  $\mathbb{R}^3$  durch  $\vartheta_i = \langle e_i, \cdot \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) erklären, dann ist  $\Omega = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \wedge \vartheta_3$ .

*Basisdarstellung.* Sei  $e_1, e_2, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$  und entsprechend  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$  die Dualbasis von  $V^*$ . Die Gesamtheit der äußeren Produkte  $\theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}$  für  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  bildet eine Basis von  $\text{Alt}^k(V)$ , d.h. jedes Element  $\omega$  von  $\text{Alt}^k(V)$  ist darstellbar als geordnete Summe

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}.$$

Verwenden der Relation  $(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k})(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 1$  zeigt, daß die reellen Zahlen  $\omega_{i_1 \dots i_k}$  durch  $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  bestimmt sind.

*Aufgabe 0.4.3.* Beweise durch Abzählen der angegebenen Basis die Dimensionsformel

$$\dim \text{Alt}^k(V) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Veranschaulichung des äußeren Produkts einer  $k$ -linearen mit einer  $l$ -linearen alternierenden Form als Schar von  $n-k-l$ -dimensionalen Hyperebenen, nämlich einer Schnittmenge von Scharen  $n-k$ - und  $n-l$ -dimensionaler Hyperebenen. Insbesondere wird im dreidimensionalen Raum das äußere Produkt einer Linearform mit einer 2-linearen alternierenden Form (nämlich eine 3-lineare alternierende Form) durch die Schnittmenge einer Schar von Ebenen mit einer Schar von Geraden (nämlich einem Gitter von Punkten) veranschaulicht.

## 0.5 Inneres Produkt

*Perspektive.* Die in Abschn. 0.4 eingeführte Operation  $\wedge$  hat die Eigenschaft, den Grad alternierender  $k$ -linearer Formen bei Produktbildung zu erhöhen. Im folgenden werden wir eine Operation kennenlernen, welche die Elemente von  $\text{Alt}^k(V)$  auf Elemente von  $\text{Alt}^{k-1}(V)$  abbildet, d.h. den Grad um Eins erniedrigt.

*Definition 0.1.* Wir haben uns oben die Vorstellung zueigen gemacht, daß alternierende  $k$ -lineare Formen Maschinen mit  $k$  Eingabeschlitzen für Vektoren sind. Wenn wir nun in einen dieser Schlitze, sagen wir den ersten, permanent einen fest gewählten Vektor einsetzen, dann bleiben nur noch  $k-1$  Eingabeschlitze übrig. Es entsteht eine Abbildung, die in den verbleibenden  $k-1$  Argumenten linear und alternierend ist. Die Operation des permanenten Einsetzens eines Vektors  $u$  in das erste Argument einer alternierenden  $k$ -linearen Form heißt "inneres Produkt" und wird mit  $i_u$  bezeichnet. In Formeln definieren wir für  $\omega \in \text{Alt}^k(V)$ :

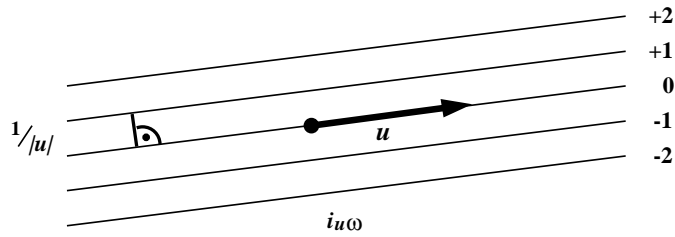
$$(i_u \omega)(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) = \omega(u, v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) . \blacksquare$$

Mit der oben getroffenen Vereinbarung  $\text{Alt}^0(V) = \mathbb{R}$  und  $\text{Alt}^1(V) = V^*$  fassen wir zusammen ( $1 \leq k \leq n$ ):

$$i_v : \text{Alt}^k(V) \rightarrow \text{Alt}^{k-1}(V) , \\ \omega \mapsto i_v \omega = \omega(v, \dots).$$

Um das Auftreten von Subskripten an Subskripten zu vermeiden, wird das innere Produkt  $i_{v_1} \omega$  auch mit  $v_1 \lrcorner \omega$  bezeichnet.

*Beispiel 0.5.1.* Wir betrachten die Euklidische Ebene  $E_2$  mit der wie in Beispiel 0.4.1 definierten Flächenform  $\omega$ , durch die  $E_2$  orientiert werde. Für einen



**Abbildung 0.6.** Inneres Produkt des Vektors  $u$  mit der Flächenform  $\omega$

ausgewählten Vektor  $u \in \mathbb{R}^2$  fragen wir dann nach der Bedeutung der Linearform  $i_u \omega$ . Wie in Abschn. 0.2 erläutert, können wir  $i_u \omega$  durch eine Schar paralleler Geraden veranschaulichen. Wegen  $(i_u \omega)(u) = \omega(u, u) = 0$  müssen die Geraden der Schar zu  $u$  parallel sein. Ist  $e$  ein zu  $u$  orthogonaler Einheitsvektor, so gilt  $(i_u \omega)(e) = \omega(u, e) = \pm|u|$ , woraus wir schließen, daß die Geraden der Schar den Abstand  $1/|u|$  voneinander haben (Abb. 0.6). Die Nummern der Geradenschar wachsen in Richtung von  $e$ , wenn  $u, e$  ein rechtshändiges (d.h. bezüglich  $\omega$  positiv orientiertes) System bilden.

*Beispiel 0.5.2.* Wir stellen uns elektrische Ladungsträger vor, die homogen über den  $E_3$  verteilt sind und sich mit einer konstanten Geschwindigkeit  $u \in \mathbb{R}^3$  bewegen. Der homogenen Ladungsdichte  $\rho$  entspricht dann eine homogene Stromdichte  $j$ . Wir behaupten, daß der Zusammenhang zwischen den beiden Größen durch  $j = i_u \rho$  gegeben ist. Zum Beweis betrachten wir irgendein von zwei Vektoren  $v$  und  $w$  aufgespanntes Parallelogramm. Die hierdurch pro Zeiteinheit fließende Ladung ist einerseits gleich  $j(v, w)$  per Definition von  $j$ , und andererseits gleich  $\rho(u, v, w)$ , denn das Parallelogramm überstreicht pro Zeiteinheit genau das Innere des durch die Vektoren  $u, v, w$  aufgespannten Spats (siehe Abb. 0.5).

Auch hier kann man der Anschauung des Studenten noch besser nachhelfen. Das innere Produkt eines Vektors mit einer topdimensionalen alternierenden Form wird ganz allgemein durch eine Schar von Geraden veranschaulicht. (Man bekommt die Geraden, indem man den Vektor an die Gitterpunkte der topdimensionalen Form ansetzt.) Mit demselben Prinzip veranschaulicht man das innere Produkt von Vektoren mit alternierenden Multilinearformen beliebigen Grades.

*Kompatibilität mit  $\wedge$ .* Wir müssen jetzt noch klären, wie sich inneres und äußeres Produkt miteinander vertragen. Zu diesem Zweck wenden wir  $i_v$  zunächst auf das äußere Produkt zweier Linearformen  $\alpha$  und  $\beta$  an. Aus

$$(i_v(\alpha \wedge \beta))(w) = (\alpha \wedge \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)$$

lesen wir ab:

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v \alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge (i_v \beta).$$



Seien nun  $\alpha$  und  $\beta$  zwei alternierende Multilinearformen vom Grad  $k$  bzw.  $l$ . Aus der Definition des inneren Produkts und der alternierenden Eigenschaft von  $\wedge$  folgt dann allgemein

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_v \beta) .$$

*Aufgabe 0.5.1.* Überprüfe diese Identität für  $k = 1$  und  $l = 2$ .

Wenn wir  $i$  mit einem Differentialoperator vergleichen und von den zusätzlich auftretenden Vorzeichen absehen, dann erinnert uns die angegebene Identität an die Produktregel der Differentialrechnung. (Man spricht davon, daß der Operator  $i$  eine „Anti-Derivation der assoziativen Algebra alternierender Multilinearformen“ ist.)

## 0.6 Zurückholen alternierender Multilinearformen

*Perspektive.* Jede lineare Abbildung eines Vektorraums auf einen anderen induziert eine Abbildung zwischen den zugehörigen Dualräumen. Dieser Sachverhalt liegt der in Abschn. 0.13 definierten Operation „Pullback“ zugrunde, die ihrerseits wichtig ist für die praktische Integration von Differentialformen; siehe Abschn. 0.14.

*Definition 0.2.* Gegeben seien zwei Vektorräume  $V$  und  $W$  und eine lineare Abbildung  $A : V \rightarrow W$ ,  $v \mapsto Av$ . Mit  $A$  haben wir dann auch die durch

$$(A^* \alpha)(v) = \alpha(Av)$$

bestimmte Abbildung  $A^* : W^* \rightarrow V^*$ . Man sagt, daß die Linearform  $\alpha \in W^*$  mittels  $A$  nach  $V^*$  zurückgeholt wird. Beachte, daß die Dimensionen von  $V$  und  $W$  keinen Beschränkungen unterliegen und insbesondere Gleichheit nicht erforderlich ist.

*Aufgabe 0.6.1.* Die lineare Abbildung  $A : V \rightarrow W$  werde bezüglich zweier Basen  $e_1, \dots, e_m$  und  $f_1, \dots, f_n$  von  $V$  bzw.  $W$  durch  $Ae_i = \sum_{j=1}^n A_i^j f_j$  ( $i = 1, \dots, m$ ) dargestellt. Die Darstellung von  $A^*$  bezüglich der Dualbasen  $\theta^1, \dots, \theta^m$  und  $\phi^1, \dots, \phi^n$  sei  $A^* \phi^j = \sum_{i=1}^m (A^*)^j_i \theta^i$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Zeige, daß  $((A^*)^j_i)_{j=1, \dots, n; i=1, \dots, m}$  die zu  $(A_i^j)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$  transponierte Matrix ist.

Die Idee des Zurückholens von Linearformen läßt sich in natürlicher Weise auf alternierende Multilinearformen verallgemeinern. Ist  $A$  wie zuvor eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$ , so definieren wir

$$A^* : \text{Alt}^k(W) \rightarrow \text{Alt}^k(V) , \\ \omega \mapsto A^* \omega$$

durch

$$(A^* \omega)(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) = \omega(Av^{(1)}, \dots, Av^{(k)}) .$$

Für einen Satz  $\alpha_{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) alternierender Multilinearformen beliebigen Grades folgt aus dieser Definition und den Eigenschaften des äußeren Produkts sofort

$$A^*(\alpha_{(1)} \wedge \alpha_{(2)} \wedge \dots \wedge \alpha_{(m)}) = A^*\alpha_{(1)} \wedge A^*\alpha_{(2)} \wedge \dots \wedge A^*\alpha_{(m)}.$$

*Aufgabe 0.6.2.* Zeige, daß für die Komposition zweier linearer Abbildungen  $A$  und  $B$  gilt:  $(AB)^* = B^*A^*$ .

*Beispiel 0.6.1.* Wir betrachten speziell für  $V = W$  und  $\dim V = n$  eine lineare Abbildung  $A : V \rightarrow V$ . Es sei  $\Omega \in \text{Alt}^n(V)$  eine von Null verschiedene alternierende Multilinearform maximalen Grades. Wegen der Eindimensionalität von  $\text{Alt}^n(V)$  muß  $A^*\Omega \in \text{Alt}^n(V)$  ein reelles Vielfaches von  $\Omega$  sein, d.h. wir können schreiben  $A^*\Omega = f(A)\Omega$  mit  $f(A) \in \mathbb{R}$ . Da  $A^*$  linear ist, hängt  $f(A)$  nur von  $A$ , nicht aber von  $\Omega$  ab. Die Funktion  $A \mapsto f(A) =: \det A$  heißt *Determinante*.

*Aufgabe 0.6.3.* In der linearen Algebra führt man  $\det A$  häufig als die Determinante einer Matrix  $(A_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  ein, die  $A$  bezüglich einer Basis darstellt. Zeige, daß diese Definition zu der soeben gegebenen basisfreien Definition äquivalent ist.

## 0.7 Hodgescher Sternoperator

*Perspektive.* In der ersten Hälfte dieser Vorlesung formulieren wir die Elektrodynamik im Euklidischen Raum  $E_3$ , in der zweiten durch Hinzunahme der Zeit im Minkowski-Raum  $M_4$ . Beide Räume besitzen eine auf dem jeweiligen Differenzvektorraum erklärte nichtentartete quadratische Form. (Im ersten Fall ist dies eine positiv definite, im zweiten Fall eine indefinite quadratische Form.) Eine derartige Form auf einem Vektorraum  $V$  induziert eine entsprechende nichtentartete quadratische Form auf dem Dualraum  $V^*$  und allgemeiner auf  $\bigoplus_{k=0}^n \text{Alt}^k(V)$ . Die Einführung einer Orientierung führt dann zur Definition des Sternoperators. Diesen verwenden wir zur Konstruktion aller mathematischer Operationen, die von der metrischen Struktur der Räume  $E_3$  und  $M_4$  Gebrauch machen.

*Vorbereitungen.* Sei  $V$  ein reeller Vektorraum der Dimension  $n$ , wie zuvor. Wir versehen  $V$  mit einer nichtentarteten (aber eben nicht notwendig positiv definiten) quadratischen Form  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Auf einem so strukturierten Vektorraum ist jedem Vektor  $v$  die Linearform  $\langle v, \cdot \rangle$  zugeordnet – ein Sachverhalt, von dem schon in mehreren Beispielen die Rede war. Wir formalisieren die Zuordnung  $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  durch die Einführung von

$$I : V \rightarrow V^*, \\ v \mapsto I(v) := \langle v, \cdot \rangle.$$

*Aufgabe 0.7.1.* Folgere aus dem Nichtentartethein von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , daß  $I$  injektiv ist.

Die Injektivität von  $I$  zieht wegen  $\dim V = \dim V^*$  Surjektivität nach sich, d.h.  $I$  ist ein Isomorphismus, und es existiert auch die inverse Abbildung  $I^{-1}$ . Mit deren Hilfe definieren wir eine quadratische Form  $(\cdot, \cdot)$  auf  $V^*$  durch

$$(\alpha, \beta) = \langle I^{-1}(\alpha), I^{-1}(\beta) \rangle .$$

Die Eigenschaft der Nichtentartung überträgt sich von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $(\cdot, \cdot)$ .

*Aufgabe 0.7.2.* Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$  mit  $\langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Zeige, daß für die duale Basis  $\theta^1, \dots, \theta^n$  gilt:  $(\theta^i, \theta^j) = g^{ij}$ , wobei  $(g^{ij})_{i,j=1, \dots, n}$  die zu  $(g_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$  inverse Matrix ist.

Die quadratische Form  $(\cdot, \cdot)$  dehnen wir nun aus auf Elemente  $\alpha, \beta \in \text{Alt}^k(V)$  der speziellen Form  $\alpha = \alpha_{(1)} \wedge \alpha_{(2)} \wedge \dots \wedge \alpha_{(k)}$  und  $\beta = \beta_{(1)} \wedge \beta_{(2)} \wedge \dots \wedge \beta_{(k)}$  mit  $\alpha_{(i)}, \beta_{(i)} \in V^*$  ( $i = 1, \dots, k$ ), indem wir definieren

$$(\alpha, \beta) = \det \begin{pmatrix} (\alpha_{(1)}, \beta_{(1)}) & \dots & (\alpha_{(1)}, \beta_{(k)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_{(k)}, \beta_{(1)}) & \dots & (\alpha_{(k)}, \beta_{(k)}) \end{pmatrix} .$$

Da solche Elemente  $\text{Alt}^k(V)$  aufspannen, wird  $(\cdot, \cdot)$  hierdurch per Linearität auf dem *gesamten* Raum  $\text{Alt}^k(V)$  erklärt.

*Definition 0.3 (Sternoperator).* Es sei  $\sigma \in \text{Alt}^n(V)$ ,  $\sigma \neq 0$ . Wegen  $(x\sigma, x\sigma) = x^2(\sigma, \sigma)$  für  $x \in \mathbb{R}$  ist die quadratische Form  $(\cdot, \cdot)$  auf dem eindimensionalen Raum  $\text{Alt}^n(V)$  entweder positiv definit oder negativ definit. Durch die Normierung  $|(\sigma, \sigma)| = 1$  wird  $\sigma$  bis auf das Vorzeichen eindeutig festgelegt. Wir entscheiden uns für eines der beiden möglichen Vorzeichen und fixieren somit eine Orientierung von  $V$ . Mit Hilfe von  $(\cdot, \cdot)$  und  $\sigma$  erklären wir nun einen Isomorphismus<sup>3</sup>

$$\star : \text{Alt}^k(V) \rightarrow \text{Alt}^{n-k}(V) , \\ \alpha \mapsto \star\alpha$$

durch die Forderung

$$\alpha \wedge \beta = (\star\alpha, \beta)\sigma$$

für alle  $\beta \in \text{Alt}^{n-k}(V)$ . Außerdem vereinbaren wir  $\star\sigma = 1$  und  $\star 1 = (\sigma, \sigma)\sigma$ .

*Aufgabe 0.7.3.* Zeige, daß für zwei alternierende Multilinearformen identischen Grades  $\alpha, \beta$  gilt:  $\alpha \wedge \star\beta = \beta \wedge \star\alpha$ .

*Aufgabe 0.7.4.* Beweise die Relation  $\star\star\alpha = (-1)^{k(n-k)}(\sigma, \sigma)\alpha$  für  $\alpha \in \text{Alt}^k(V)$ .

<sup>3</sup> In der physikalischen Literatur wird  $\star$  oft hochgestellt.

*Beispiel 0.7.1.* Wir betrachten den Euklidischen Vektorraum  $V = \mathbb{R}^3$  mit Orthonormalbasis  $e_1, e_2, e_3$  und Dualbasis  $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ .  $V$  werde durch  $\sigma = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$  orientiert. Aus der obigen Definition errechnet man dann leicht die folgende Wirkung von  $\star$ :

$$\begin{aligned} \star\theta^1 &= \theta^2 \wedge \theta^3, & \star\theta^2 &= \theta^3 \wedge \theta^1, & \star\theta^3 &= \theta^1 \wedge \theta^2, \\ \star(\theta^2 \wedge \theta^3) &= \theta^1, & \star(\theta^3 \wedge \theta^1) &= \theta^2, & \star(\theta^1 \wedge \theta^2) &= \theta^3. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß in diesem Fall insbesondere gilt  $\star\star = \text{id}$ .

Im  $E_3$  veranschaulichen wir Linearformen durch Ebenenscharen und 2-lineare alternierende Formen durch Geradenscharen. Der Sternoperator wandelt dann eine Geradenschar in die dazu senkrechte Ebenenschar um und umgekehrt. Dabei geht offensichtlich die Metrik des  $E_3$  ein.

*Beispiel 0.7.2.* Sei  $V = \mathbb{R}^4$  mit der Standardbasis  $e_0, e_1, e_2, e_3$  und der Dualbasis  $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3$ . Wir versehen  $V$  mit der durch  $\langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$  mit  $-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = +1$  und  $g_{ij} = 0$  für  $i \neq j$  definierten Lorentz-Metrik, und wir legen die Orientierung von  $V$  durch  $\sigma = \theta^0 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$  fest. Es gelten dann u.a. die Gleichungen

$$\begin{aligned} \star\theta^0 &= \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3, & \star\theta^1 &= \theta^0 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3, \\ \star(\theta^0 \wedge \theta^2) &= -\theta^1 \wedge \theta^3, & \star(\theta^2 \wedge \theta^3) &= -\theta^0 \wedge \theta^1. \end{aligned}$$

Die aus der Definition des Sternoperators resultierende Rechenvorschrift hierzu lautet wie folgt. Der Sternoperator ist auf das Dachprodukt  $\alpha$  von einigen  $\theta^i$ 's anzuwenden. Setze  $\beta$  gleich dem Dachprodukt der übrigen  $\theta^i$ 's und ordne die Faktoren so an, daß  $\alpha \wedge \beta$  gerade  $\sigma$  ergibt. Dann gilt  $\star\alpha = -\beta$  (bzw.  $\star\alpha = \beta$ ), falls  $\theta^0$  in  $\beta$  vorkommt (bzw. nicht vorkommt).

*Aufgabe 0.7.5.* Beweisen Sie die folgenden Relationen, die in einem Vektorraum mit Skalarprodukt und Sternoperator das innere mit dem äußeren Produkt verknüpfen:

$$\begin{aligned} I(v) \wedge \alpha &= (-1)^{\deg(\alpha)} (\star^{-1} \circ i_v \circ \star) \alpha, \\ i_v \alpha &= (-1)^{\deg(\alpha)-1} (\star^{-1} \circ I(v) \wedge \circ \star) \alpha. \end{aligned}$$

(Verkettung von Operatoren ( $\circ$ ) schon eingeführt?)

## 0.8 Dichten...

*Beispiel 0.8.1.* Wir legen hier wie im Hauptteil der Vorlesung den durch die Rechte-Hand-Regel orientierten  $E_3$  zugrunde und betrachten eine räumlich und zeitlich konstante elektrische Stromdichte  $j$ . Eine solche Größe fassen wir als Vorschrift auf, welche jedem Paar von Vektoren  $v$  und  $w$  die – mit  $j(v, w)$  bezeichnete – Ladung zuordnet, die pro Zeiteinheit durch ein von  $v$  und  $w$  aufgespanntes Parallelogramm fließt. Hierbei zählen wir den Stromfluß positiv

in Richtung desjenigen Normalenvektors  $u$ , der mit  $v$  und  $w$  (in dieser Reihenfolge) ein rechtshändiges System bildet (Abb. 0.5). Da  $u$  unter Austausch von  $v$  und  $w$  sein Vorzeichen umkehrt, gilt:  $j(v, w) = -j(w, v)$ . Für  $v = w$  folgt dann insbesondere  $j(v, v) = -j(v, v) = 0$ , was sich mit der Beobachtung verträgt, daß ein von zwei linear abhängigen Vektoren aufgespanntes Parallelogramm Null ist und somit verschwindenden Ladungsdurchfluß haben muß. Da  $j$  außerdem linear ist, folgt  $j \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ , d.h.  $j$  ist eine alternierende 2-lineare Form.

*Beispiel 0.8.2.* Eine räumlich und zeitlich konstante Ladungsdichte  $\rho$  im orientierten  $E_3$  ist ein Element von  $\text{Alt}^3(\mathbb{R}^3)$ . Sie ist nämlich eine Abbildung, die jedem von einem Tripel von Vektoren  $u, v, w$  aufgespannten Spat die darin enthaltene elektrische Ladung  $\rho(u, v, w)$  zuordnet. Hierbei vereinbaren wir, die Ladung positiv (bzw. negativ) zu zählen, falls  $u, v, w$  ein rechtshändiges (bzw. linkshändiges) System bilden. Sind zwei der Vektoren, sagen wir  $u$  und  $v = xu$ , linear abhängig, so entartet der Spat zu einer Fläche und die eingeschlossene Ladung verschwindet, was algebraisch aus

$$\rho(u, v, w) = x\rho(u, u, w) = -x\rho(u, u, w) = 0$$

folgt.

## 0.9 Vektorfelder und 1-Formen

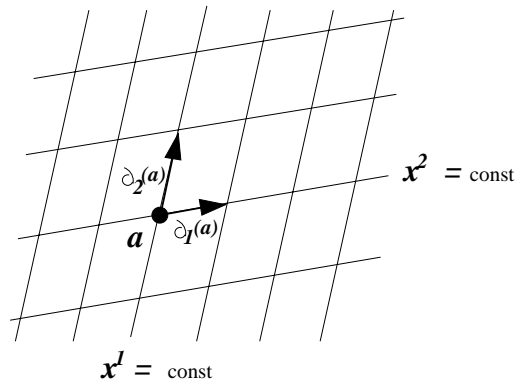
*Perspektive.* In den Abschn. 0.1-0.7 haben wir das in dieser Vorlesung benötigte Material aus der linearen Algebra bereitgestellt. Wie an einigen Beispielen sichtbar wurde, ist hiermit eine Beschreibung räumlich und zeitlich *konstanter* physikalischer Größen möglich. Für den Übergang zu räumlich und zeitlich *veränderlichen* Größen bedarf es der Verallgemeinerung der oben eingeführten Strukturen auf integro-differentielle Form. Damit werden wir uns nun im Rest des einführenden mathematischen Kapitels beschäftigen.

*Vektorfelder.* In der Differentialgeometrie definiert man Vektorfelder als „Schnitte des Tangentialbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit“. Da diese Definition in ihrer ganzen Schönheit für unsere Zwecke nicht wirklich unbedingt erforderlich ist, bescheiden wir uns mit der Einführung des Vektorfeld-Begriffes über einem affinen Raum,  $A$ . In dem laufenden Abschnitt seien Punktmenge und Differenzvektorraum von  $A$  durchweg mit  $M$  bzw.  $V$  bezeichnet. Unter einem *Vektorfeld*  $v$  auf  $A$  verstehen wir dann eine Abbildung, die jedem Punkt  $a \in M$  einen Vektor  $v(a) \in V$  zuordnet; mathematisch ausgedrückt:

$$\begin{aligned} v : M &\rightarrow V, \\ a &\mapsto v(a). \end{aligned}$$

Die Dimension von  $V$  halten wir hier allgemein und spezialisieren an späterer Stelle zu  $\dim V = 3$  (für den Euklidischen Raum  $E_3$ ) und  $\dim V = 4$  (für den

Minkowski-Raum  $M_4$ ). Ist eine Basis  $e_1, \dots, e_n$  von  $V$  fest vorgegeben, so bezeichnen wir das konstante Vektorfeld  $a \mapsto e_i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\partial_i$ . Das Vektorfeld  $\partial_i$  folgt also den Koordinatenlinien  $x^j = \text{const}$  ( $j = 1, \dots, n; j \neq i$ ), siehe Abb. 0.7.



**Abbildung 0.7.** Das konstante Vektorfeld  $\partial_1$  ( $\partial_2$ ) folgt den Koordinatengeraden  $x^2 = \text{const}$  (bzw.  $x^1 = \text{const}$ ).

*Koordinatenfunktionen.* In einem affinen Raum  $A$  mit Koordinatensystem  $(o; e_1, \dots, e_n)$  sind jedem Punkt  $a$  in eindeutiger Weise ein Satz von Koordinaten  $x^i(a)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) zugeordnet. Wir wollen die eindeutige Zuordnung  $a \mapsto x^i(a)$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  fortan als Funktion auffassen und nennen  $x^i: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine *Koordinatenfunktion*. Allgemeiner wird der Begriff „Funktion“ in dieser Vorlesung immer für Abbildungen von Teilmengen eines affinen Raumes in die reellen Zahlen stehen.

*Partielle Ableitung.* Es sei nun  $A$  mit seiner üblichen Topologie versehen.<sup>4</sup> Sei weiter  $(o; e_1, \dots, e_n)$  ein affines Koordinatensystem von  $A$  und  $f$  eine auf einem offenen Teilgebiet  $U \subset M$  stetig differenzierbare Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Die *partielle Ableitung*  $(\partial f / \partial x^i)(a)$  wird durch Differenzieren von  $f$  im Punkt  $a \in U$  in Richtung des  $i$ -ten Basisvektors gebildet:

$$(\partial f / \partial x^i)(a) = \frac{d}{ds} f(a + se_i) \Big|_{s=0}.$$

Die hierdurch definierte Größe  $\partial f / \partial x^i$  ist wiederum eine Funktion auf  $U$ . Wir schreiben für  $\partial f / \partial x^i$  auch kürzer  $\partial_i f$ . Beachte, daß die partiellen Ableitungen  $\partial f / \partial x^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) nicht invariant definiert sind, sondern von der Wahl der Basisvektoren  $e_1, \dots, e_n$  abhängen. Dieser Umstand motiviert die folgende basisfreie Definition des Ableitungsbegriffs.

<sup>4</sup> Die Begriffe „Topologie“ und „stetig differenzierbar“ werden hier als aus der Analysis bekannt vorausgesetzt.

*Das Differential einer Funktion.* Gegeben sei wie zuvor eine auf einem offenen Teilgebiet  $U \subset M$  stetig differenzierbare Funktion  $f$ . Wir bezeichnen mit  $(df)_a$  die Linearform, die für festes  $a \in U$  jedem Vektor  $v \in V$  die Ableitung von  $f$  im Punkt  $a$  in Richtung von  $v$  zuweist. Die formale Definition lautet:

$$(df)_a(v) = \left. \frac{d}{ds} f(a + sv) \right|_{s=0} .$$

Für die oben definierte partielle Ableitung  $(\partial_i f)(a)$  haben wir dann den Ausdruck  $(\partial_i f)(a) = (df)_a(e_i)$ , d.h. sie wird durch Einsetzen des Basisvektors  $e_i$  in  $(df)_a$  erhalten. Das *Differential* der Funktion  $f$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow L(V, \mathbb{R}) , \\ a &\mapsto (df)_a . \end{aligned}$$

Das Differential  $df$  einer Funktion  $f$  wird in der Literatur manchmal auch mit  $Df$  bezeichnet, und man schreibt dann  $D_a f$  anstelle von  $(df)_a$ .

*Beispiel 0.9.1.* Wir greifen Beispiel 0.2.1 wieder auf und nehmen die Verallgemeinerung auf ein räumlich veränderliches konservatives Kraftfeld  $K$  vor. Ein solches Kraftfeld wird durch die Angabe einer „Potentialfunktion“  $\Phi$  vollständig charakterisiert. Per Definition von  $\Phi$  ist die beim Verschieben eines Körpers vom Punkt  $a$  zum Punkt  $b$  aufzubringende Arbeit gerade durch  $\Phi(b) - \Phi(a)$  gegeben. Das Kraftfeld  $K$  selbst weist nun jedem Punkt  $a$  die Linearform  $K_a$  zu, deren Anwendung auf einen Vektor  $v$  die (differentielle) Energie ergibt, die bei Verschiebung des Körpers im Punkt  $a$  in Richtung von  $v$  frei wird; in Formeln:

$$K_a(v) = - \left. \frac{d}{ds} \Phi(a + sv) \right|_{s=0} = -(d\Phi)_a(v) ,$$

d.h.  $K$  ist gleich minus dem Differential von  $\Phi$ .

**Veranschaulichung des Differentials einer Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mittels der (lokalen) Schar von Tangentengeraden an die Höhenlinien der Funktion.**

*1-Formen.* Oben haben wir das Differential einer Funktion kennengelernt als Abbildung, die jedem Punkt eine Linearform zuweist. Abbildungen vom Typ: (Punkte  $\rightarrow$  Linearformen) heißen *Differentialformen ersten Grades* oder kurz *1-Formen*. Im „Maschinenbild“ könnten wir sagen, daß durch eine 1-Form  $\alpha$  in jedem Punkt  $p$  eine lineare Maschine  $\alpha_p$  mit einem Eingabeschlitz für Vektoren aufgestellt wird. Beachte, daß wir das Ortsargument  $p$  als *Subskript* an  $\alpha$  heften. Dies tun wir deshalb, weil dann rechts von  $\alpha$  noch Platz für den einzugebenden Vektor bleibt.

*Produktregel.* Multiplikation einer 1-Form  $\alpha$  mit einer Funktion  $f$  wird *punktweise* definiert:  $(f\alpha)_p = f(p)\alpha_p$ . Die resultierende Größe  $f\alpha$  ist wieder eine 1-Form. Für das Differential des Produktes zweier Funktionen  $f$  und  $g$  gilt die Produktregel

$$d(fg) = (df)g + f(dg) .$$

*Koordinatenformen.* Sei nun  $(o; e_1, \dots, e_n)$  ein affines Koordinatensystem von  $A$  und  $\theta^1, \dots, \theta^n$  die entsprechende Dualbasis von  $V^* = L(V, \mathbb{R})$ . Dann sind die *Koordinatenformen*  $dx^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) durch  $dx^i : M \rightarrow V^*$ ,  $a \mapsto \theta^i$  erklärt. Eine allgemeine 1-Form  $\alpha$  läßt sich durch die Koordinatenformen  $dx^i$  ausdrücken:  $\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i$ . Die Komponenten  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sind hierbei Funktionen. Wegen  $(df)_a(e_i) = (\partial f / \partial x^i)(a)$  und  $(df)_a = \sum_i (\partial f / \partial x^i)(a) \theta^i$  hat das Differential einer Funktion die Basisdarstellung  $df = \sum_i (\partial f / \partial x^i) dx^i$ .

*Aufgabe 0.9.1.* Zeige, daß  $dx^i$  mit dem Differential der Koordinatenfunktion  $x^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  identisch ist.

*Beispiel 0.9.2.* Sei  $E_2$  die Euklidische Ebene mit Koordinatenfunktionen  $x := x^1$  und  $y := x^2$ . Wir nehmen den Koordinatenursprung  $o$  aus  $E_2$  heraus und betrachten die 1-Form

$$\alpha = (x^2 + y^2)^{-1}(x dy - y dx).$$

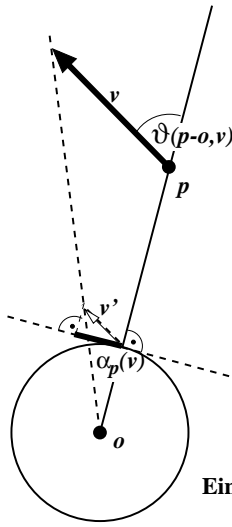
$\alpha$  ist auf  $E_2 - \{o\}$  wohldefiniert. Zur geometrischen Deutung von  $\alpha$  sei  $p$  ein Punkt mit Abstand  $d(p, o) = |p - o|$  vom Ursprung und  $v$  ein Vektor mit Komponenten  $v_x = (dx)_p(v)$  und  $v_y = (dy)_p(v)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_p(v) &= (x^2(p) + y^2(p))^{-1} (x(p)(dy)_p(v) - y(p)(dx)_p(v)) \\ &= \frac{x(p)v_y - y(p)v_x}{d^2(p, o)} = \frac{|v|}{|p - o|} \sin \vartheta(p - o, v), \end{aligned}$$

wobei  $\vartheta(p - o, v)$  den von den Vektoren  $p - o$  und  $v$  eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Die sich hieraus ergebende Berechnungsvorschrift für  $\alpha_p(v)$  ist in Abb. 0.8 illustriert: durch eine Skalentransformation, d.h. eine Streckung oder Stauchung, bezüglich  $o$  gehen wir von  $v$  zu  $v' = v/|p - o|$  über. Der Vektor  $v'$  wird sodann auf die zu  $p - o$  senkrechte und an den Einheitskreis um  $o$  tangente Gerade projiziert. Die Projektion hat wegen der trigonometrischen Bedeutung der Sinusfunktion den gewünschten Wert  $\alpha_p(v) = |v| \sin \vartheta(p - o, v) / |p - o|$ . Wir nennen  $\alpha$  die "Winkel-1-Form" auf der Euklidischen Ebene mit Ursprung  $o$ .

*Vektorfeld als Differentialoperator.* Eine 1-Form  $\omega$  kann auf ein Vektorfeld  $u$  angewendet werden – oder, anders gesagt,  $u$  läßt sich in  $\omega$  einsetzen –, wobei eine Funktion  $\omega(u)$  entsteht, die punktweise durch  $\omega(u)|_p = \omega_p(u(p))$  definiert ist. Wir nennen  $\omega(u)$  das innere Produkt von  $u$  mit  $\omega$  und schreiben hierfür auch  $i_u \omega$  oder  $u \lrcorner \omega$ . Wegen  $(dx^i)(\partial_j) = \theta^i(e_j) = \delta_j^i$  ergibt das innere Produkt von  $\omega$  mit dem Basisvektorfeld  $u = \partial_i$  die  $i$ -te Komponente  $\omega_i = \omega(\partial_i)$  der Koordinatendarstellung  $\omega = \sum \omega_i dx^i$ . Insbesondere entsteht beim Einsetzen von  $\partial_i$  in  $df$  die  $i$ -te partielle Ableitung  $(df)(\partial_i) = \hat{\partial}_i f$ . Hieran erkennt man auch den Sinn der gewählten Notation für die Basisvektorfelder  $\partial_i$ : faßt man das Vektorfeld  $\partial_i : p \mapsto e_i$  als Vektorfeld von *Richtungsableitungen* auf, so geht es in den Differentialoperator  $\hat{\partial}_i = \partial / \partial x^i$  über. Ganz allgemein ist jedem Vektorfeld  $u : U \subset M \rightarrow V$  in kanonischer Weise ein Differentialoperator





Einheitskreis  
im  $E_2$

Abbildung 0.8. Geometrische Bedeutung der Winkel-1-Form  $\alpha$

erster Ordnung  $\hat{u}$  zugeordnet ( $\hat{u}$  operiert auf den auf  $U$  stetig differenzierbaren Funktionen  $f$ ), und zwar durch die Gleichung  $\hat{u}f = (df)(u)$ .

*Krummlinige Koordinaten.* In vielen physikalischen Anwendungen ist das Rechnen mit kartesischen Koordinaten unbequem. Für zylindersymmetrische Probleme verwendet man lieber Zylinderkoordinaten, für kugelsymmetrische lieber Kugelkoordinaten usw., und im allgemeinsten Fall wird man sich geeigneter krummliniger Koordinaten bedienen wollen. Unter einem krummlinigen Koordinatensystem von  $U \subset M$  versteht man einen Satz von Funktionen  $\xi^1, \dots, \xi^n$  ( $n = \dim V$ ) mit der Eigenschaft, daß die Differentiale  $d\xi^1, \dots, d\xi^n$  in allen Punkten von  $U$  linear unabhängig sind. Wie im kartesischen Fall wird die Dualbasis der Vektorfelder  $\partial_{\xi^i}$  durch  $(d\xi^i)(\partial_{\xi^j}) = \delta_j^i$  erklärt. Die Definition der partiellen Ableitung  $\partial f / \partial \xi^i$  ist dann

$$(\partial f / \partial \xi^i)(a) := (df)_a (\partial_{\xi^i}(a)) = \left. \frac{d}{ds} f(a + s \partial_{\xi^i}(a)) \right|_{s=0}.$$

*Aufgabe 0.9.2.* Wir wollen die Bedeutung der Winkel-1-Form  $\alpha$  von Beispiel 0.9.2 noch besser verstehen und führen dazu in der Euklidischen  $xy$ -Ebene Polarkoordinaten  $r, \varphi$  durch  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  ein. Zeige, daß  $\alpha$  in diesen Koordinaten den Ausdruck  $\alpha = d\varphi$  hat. Zeige weiter, daß  $\alpha$  mit der Flächenform  $\omega = dx \wedge dy$  und dem radialen Vektorfeld  $\partial_r$  als inneres Produkt  $\alpha = \partial_r \lrcorner \omega / r$  geschrieben werden kann.

*Gradient.* In einem Euklidischen Raum  $E = (A, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist über den kanonischen Isomorphismus  $I : v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  jedem Vektor  $v$  die Linearform  $I(v)$  zugeordnet. Durch punktweise Verallgemeinerung von  $I$  entsteht ein Isomorphismus  $\hat{I}$ , der Vektorfelder auf 1-Formen abbildet. In Formeln ist  $\hat{I}$  durch

$(\hat{I}(v))(a) := I(v(a))$  erklärt. Die Anwendung von  $\hat{I}^{-1}$  auf das Differential einer Funktion  $f$  ergibt ein Vektorfeld, das man den *Gradienten* von  $f$  nennt und mit  $\text{grad}f$  bezeichnet:

$$\text{grad}f = \hat{I}^{-1}(df) .$$

Auswertung auf einer Orthonormalbasis  $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$  liefert über

$$\langle (\text{grad}f)(a), e_i \rangle = \langle I^{-1}((df)_a), e_i \rangle = (df)_a(e_i) = (\partial f / \partial x^i)(a)$$

den Ausdruck

$$(\text{grad}f)(a) = \sum_{i=1}^n (\partial f / \partial x^i)(a) e_i .$$

## 0.10 Differentialformen

*Definition 0.4.* Wie in Abschn. 0.9 sei  $A$  ein affiner Raum mit Punktmenge  $M$  und Differenzvektorraum  $V$ . (Die Topologie von  $A$  sei wieder die gewöhnliche.) Weiter sei  $U \subset M$  offen. Eine *Differentialform  $k$ -ten Grades*  $\omega$  auf  $U$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega : U &\rightarrow \text{Alt}^k(V) , \\ a &\mapsto \omega_a . \end{aligned}$$

Wie man hieran erkennt, stehen Differentialformen  $k$ -ten Grades zu 1-Formen in derselben Beziehung wie alternierende Multilinearformen zu Linearformen. Differentialformen vom Grad  $k$  heißen kurz  *$k$ -Formen*. Der Begriff *0-Form* wird synonym mit dem Begriff „Funktion“ gebraucht. Wenn nichts anderes spezifiziert ist, setzen wir hier wie im folgenden voraus, daß die betrachteten Differentialformen – als Abbildungen mit Definitionsbereich  $U$  – unendlich oft differenzierbar sind. Die  $k$ -Formen auf  $U$  bilden einen linearen Raum über  $\mathbb{R}$ , der mit  $\Lambda^k(U)$  bezeichnet wird.<sup>5</sup> Eine  $k$ -Form mit dem maximalen Grad  $k = \dim V$  heißt *top-dimensional*.

*Operationen mit Differentialformen.* Die in den Abschn. 0.4, 0.5 und 0.7 eingeführten Operatoren  $\wedge$ ,  $i$  und  $\star$  verallgemeinern sich trivial auf Differentialformen (anstelle von alternierenden Multilinearformen) und Vektorfelder (anstelle von Vektoren). Dies geschieht in natürlicher Weise durch *punktweise* Definition aller Operationen. Es seien  $f \in \Lambda^0(U)$ ,  $\alpha \in \Lambda^k(U)$  und  $\beta \in \Lambda^l(U)$ . Dann gelten die Relationen

$$\begin{aligned} (f\alpha)_p &= f(p)\alpha_p , \\ (\alpha \wedge \beta)_p &= \alpha_p \wedge \beta_p , \end{aligned}$$

<sup>5</sup> Der Kürze halber verzichten wir an dieser Stelle auf die Unterscheidung zwischen gewöhnlichen Differentialformen und solchen mit „Schraubensinn“. Die Unterscheidung ist wichtig für die Paritätsinvarianz der elektromagnetischen Theorie und wird später (in Kap. 5.1) nachgeholt.

$$(i_v \alpha)_p = i_{v(p)} \alpha_p .$$

Für den Fall, daß durch Vorgabe einer metrischen Struktur und Orientierung auf  $V$  ( $\dim V = n$ ) ein Sternoperator  $\star : \text{Alt}^k(V) \rightarrow \text{Alt}^{n-k}(V)$  erklärt ist, definieren wir  $\star : \Lambda^k(U) \rightarrow \Lambda^{n-k}(U)$  durch

$$(\star \alpha)_p = \star(\alpha_p) .$$

Alle in den Abschn. 0.4, 0.5 und 0.7 angegebenen Eigenschaften übertragen sich; insbesondere gelten für  $\alpha \in \Lambda^k(U)$ ,  $\beta \in \Lambda^l(U)$  und  $v$  ein Vektorfeld auf  $U$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha , \\ i_v(\alpha \wedge \beta) &= (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_v \beta) . \end{aligned}$$

Von der Verallgemeinerung der Operation des Zurückholens alternierender Multilinearformen zum Zurückholen von Differentialformen wird in Abschn. 0.13 noch ausführlich die Rede sein.

*Koordinatendarstellung von Differentialformen.* Sind  $dx^1, \dots, dx^n$  ein Satz von Koordinatenformen auf  $U$ , so hat  $\omega \in \Lambda^k(U)$  die Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} .$$

Die Koeffizienten  $\omega_{i_1 \dots i_k}$  sind Funktionen  $: U \rightarrow \mathbb{R}$  und werden durch  $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k})$  bestimmt. Es ist manchmal zweckmäßig, von der geordneten Indizierung der Koeffizienten von Differentialformen abzuweichen. Wir definieren  $\omega_{\pi(i_1) \dots \pi(i_k)} = \text{sign}(\pi) \omega_{i_1 \dots i_k}$ , wobei  $\pi$  eine Permutation bezeichnet, und schreiben auch

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} .$$

*Aufgabe 0.10.1.* Es seien ein Vektorfeld  $v = \sum_i v^i \partial_i$  und zwei 1-Formen  $\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i$  und  $\beta = \sum_i \beta_i dx^i$  gegeben. Zeige die Gültigkeit der Relationen

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) dx^i \wedge dx^j , \\ i_v(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{i,j=1}^n v^i (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) dx^j . \end{aligned}$$

*Aufgabe 0.10.2.* Im Euklidischen Raum  $E_3$  seien ein Ursprung  $o$  und kanonische Koordinatenfunktionen  $x := x^1$ ,  $y := x^2$ ,  $z := x^3$  ausgezeichnet. Die Volumenform  $dx \wedge dy \wedge dz$  werde mit  $\Omega$  und der Abstand eines Punktes  $a$  von  $o$  mit  $r(a) = d(a, o)$  bezeichnet. Ferner sei  $X$  das radiale Vektorfeld  $x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$  mit Symmetriepunkt  $o$ . Wir erklären die *Raumwinkel-Form*  $\tau$  auf  $E_3 \setminus \{o\}$  durch

$$\tau = i_X \Omega / r^3 .$$

Zeige die Gültigkeit der folgenden Aussagen: (1)  $\tau$  ist in Koordinatendarstellung durch

$$\tau = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$$

gegeben. (2)  $\tau$  ist unter den eigentlichen Drehungen des  $E_3$ , die den Punkt  $o$  fixieren, invariant. (3) In sphärischen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

hat  $\tau$  den Ausdruck  $\sin \theta d\theta \wedge d\varphi$ .

**Illustration des Raumwinkels**

## 0.11 Cartan-Ableitung

*Perspektive.* Nachdem wir die Verallgemeinerung von alternierenden Multilinearformen zu Differentialformen geschafft haben, werden wir jetzt lernen, wie man Differentialformen differenziert. Dies geschieht durch einen Differentialoperator  $d$ , der den Grad einer Differentialform um Eins erhöht.  $d$  zusammen mit dem inneren Produkt  $i$  und dem Sternoperator  $\star$  gestattet die Konstruktion aller Differentialoperatoren, die wir benötigen.

*Definition 0.5.* Wir definieren einen Differentialoperator

$$\begin{aligned} d : A^k(U) &\rightarrow A^{k+1}(U) \\ \omega &\mapsto d\omega \end{aligned}$$

auf die folgende Weise. Zunächst einmal falle  $d\omega$  für  $k = 0$  mit dem in Abschn. 0.9 erklärten Differential der Funktion  $\omega$  zusammen. Dann vereinbaren wir, daß das Fehlen eines Vektors  $v$  in einer geordneten Liste von Vektoren durch ein Dach ( $\hat{v}$ ) über dem betreffenden Vektor symbolisiert wird. Die Liste  $(v^{(0)}, \dots, \hat{v}^{(j)}, \dots, v^{(k)})$  besteht also aus  $k$  Vektoren, wobei  $v^{(j)}$  ausgelassen wird. Mit dieser Konvention definieren wir  $(d\omega)_a$  für  $k \geq 1$  durch die Formel

$$(d\omega)_a(v^{(0)}, \dots, v^{(k)}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \left( (D_a \omega)(v^{(j)}) \right) (v^{(0)}, \dots, \hat{v}^{(j)}, \dots, v^{(k)}),$$

wobei  $D_a \omega$  das Differential der Abbildung  $\omega : U \rightarrow \text{Alt}^k(V)$  im Punkt  $a$  bezeichnet:

$$(D_a \omega)(v) := \left. \frac{d}{ds} \omega_{a+sv} \right|_{s=0}.$$

$(d\omega)_a$  ist per Konstruktion  $(k+1)$ -linear und alternierend. Folglich gilt  $(d\omega)_a \in \text{Alt}^{k+1}(V)$  und die Abbildung  $d\omega : a \mapsto (d\omega)_a$  ist in der Tat eine Differentialform vom Grad  $k+1$ . Der so erklärte Differentialoperator  $d$  heißt *Cartan-Ableitung* oder *äußere Ableitung* (engl. „exterior derivative“).

*Zweimal d ist Null.* Die Cartan-Ableitung  $d$  zeichnet sich durch viele schöne Eigenschaften aus. Wir werden später insbesondere sehen, daß die Definition von  $d$  genauso gemacht ist, wie es sein muß, damit die Integration von Differentialformen ihre Differentiation umkehrt (Abschn. 0.17). Hier zeigen wir zuallererst, daß die zweimalige Anwendung von  $d$  in jedem Fall Null ergibt. Dazu ersetzen wir in dem definierenden Ausdruck für  $d\alpha \in \Lambda^{k+1}(U)$  die  $k$ -Form  $\alpha$  durch  $\alpha = d\omega$  und erhalten per Definition

$$\begin{aligned} (d(d\omega))_a(v^{(0)}, \dots, v^{(k)}) = & \\ & \sum_{l < j} (-1)^{j+l} \frac{d^2}{ds dt} \omega_{\alpha + sv^{(j)} + tv^{(l)}}(v^{(0)}, \dots, \hat{v}^{(l)}, \dots, \hat{v}^{(j)}, \dots, v^{(k)}) \Big|_{s=t=0} \\ & + \sum_{l > j} (-1)^{j+l-1} \frac{d^2}{ds dt} \omega_{\alpha + sv^{(j)} + tv^{(l)}}(v^{(0)}, \dots, \hat{v}^{(j)}, \dots, \hat{v}^{(l)}, \dots, v^{(k)}) \Big|_{s=t=0} . \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet, weil jeder Term der ersten Summe durch einen entsprechenden Term der zweiten Summe genau weggehoben wird. Wir haben also die wichtige Eigenschaft

$$\boxed{d \circ d = 0} ,$$

wobei  $\circ$  Verkettung von Operatoren bedeutet.

*Kompatibilität mit  $\wedge$ .* Als nächstes fragen wir, wie sich die Cartan-Ableitung mit dem äußeren Produkt verträgt. Dazu schauen wir uns  $d\omega$  zunächst für den Spezialfall  $\omega = f\alpha$  mit  $f$  einer Funktion und  $\alpha$  einer 1-Form an. Per Definition von  $d$  gilt:

$$(d\omega)_p(u, v) = ((D_p\omega)(u))(v) - ((D_p\omega)(v))(u) .$$

Nun ist nach der Produktregel

$$(D_p\omega)(v) = \frac{d}{ds} f(p + sv) \alpha_{p+sv} \Big|_{s=0} = (df)_p(v) \alpha_p + f(p) (D_p\alpha)(v) ,$$

und Antisymmetrisieren ergibt:

$$\begin{aligned} (d\omega)_p(u, v) = & (df)_p(u) \alpha_p(v) + f(p) ((D_p\alpha)(u))(v) \\ & - (df)_p(v) \alpha_p(u) - f(p) ((D_p\alpha)(v))(u) . \end{aligned}$$

Man sieht, daß gilt:

$$(d\omega)_p(u, v) = ((df)_p \wedge \alpha_p)(u, v) + f(p) ((d\alpha)_p(u, v)) ,$$

und folglich ist

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha .$$

*Aufgabe 0.11.1.* Zeige für zwei 1-Formen  $\alpha$  und  $\beta$  die Gültigkeit der Gleichung

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge (d\beta) .$$

*Cartan-Ableitung als Anti-Derivation.* Die Aussage der Aufgabe liefert zusammen mit der Assoziativität des äußeren Produkts die allgemeine Regel

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$$

für  $\alpha \in \Lambda^k(U)$ ,  $\beta \in \Lambda^l(U)$ . Ein Operator mit dieser Eigenschaft heißt eine *Anti-Derivation* der äußeren Algebra  $\bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(U)$ . Wir kennen bereits eine andere Anti-Derivation derselben Algebra: das innere Produkt mit einem Vektorfeld (siehe Abschn. 0.5 und 0.10).

*Cartan-Ableitung axiomatisch.* Zusammenfassend halten wir fest, daß  $d$  die folgenden charakteristischen Eigenschaften hat: (1)  $d$  ist eine Anti-Derivation der äußeren Algebra von Differentialformen, (2)  $d \circ d = 0$ , und (3)  $d$  auf Funktionen  $f$  ergibt das Differential  $df = \sum (\partial f / \partial x^i) dx^i$ . Man kann umgekehrt zeigen, daß diese Eigenschaften die Cartan-Ableitung vollständig bestimmen. Beim praktischen Rechnen mit  $d$  wird man eher selten auf die grundlegende Definition 0.5 zurückgreifen, sondern meist mit den Regeln (1)–(3) arbeiten. Wie oben kurz angedeutet, ist die Definition 0.5 durch die Integration von Differentialformen motiviert.

*Cartan-Ableitung in Koordinatendarstellung.* Der Umgang mit  $d$  in Koordinatendarstellung ist besonders einfach, weil die Cartan-Ableitung jeder Koordinatenform  $dx^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) wegen  $d \circ d = 0$  verschwindet. Bei Anwendung von  $d$  auf eine  $k$ -Form  $\omega$  mit Koordinatendarstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

entsteht deshalb nach der Anti-Derivations-Regel der Ausdruck

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich durch Entwickeln des Differentials  $d\omega_{i_1 \dots i_k}$  nach den Koordinatenformen und Umordnen der Summe in Standardform bringen.

*Beispiel 0.11.1.* Eine 1-Form  $\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i$  hat die Cartan-Ableitung

$$d\alpha = \sum_{i=1}^n d\alpha_i \wedge dx^i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i) dx^i \wedge dx^j.$$

*Rotation eines Vektorfeldes.* Jedem differenzierbaren Vektorfeld  $X$  auf dem orientierten  $E_3$  (oder einem Teil davon) ist ein „Wirbelfeld“ zugeordnet, das folgendermaßen konstruiert wird. Zunächst wandeln wir  $X$  mit Hilfe des kanonischen Isomorphismus  $I$ , der in Abschn. 0.9 mit  $\hat{I}$  bezeichnet wurde, in die 1-Form  $\alpha = I(X) = \langle X, \cdot \rangle$  um. Im zweiten Schritt bilden wir die Cartan-Ableitung  $d\alpha$ . Die resultierende 2-Form konvertieren wir im dritten Schritt durch Anwendung des Sternoperators in die 1-Form  $\star d\alpha$ . Abschließende Anwendung von  $I^{-1}$  auf  $\star d\alpha$  resultiert dann in einem Vektorfeld, das man die

*Rotation* von  $X$  nennt und mit  $\text{rot}X$  bezeichnet. Laut Definition ist „rot“ der Differentialoperator

$$\text{rot} = I^{-1} \circ \star \circ d \circ I .$$

Beachte, daß die Differentialform  $\star dI(X)$  im  $E_n$  den Grad  $n - 2$  hat. Die Rotation eines Vektorfeldes ist deshalb nur für den Spezialfall  $n = 3$  definiert. Beachte weiter, daß  $\text{rot}X$  von der Orientierung des  $E_3$  abhängt. Die Rotation ist offenbar ein im Vergleich zu  $d$  reichlich komplizierter und spezieller Differentialoperator. In dieser Vorlesung werden wir nie Gebrauch von ihm machen.

*Aufgabe 0.11.2.* Es sei  $\epsilon_{ijk}$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) der Levi-Civita Tensor:  $\epsilon_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)} = \text{sign}(\pi)$  und Null sonst. Zeige, daß  $\text{rot}X$  in kartesischer Koordinatendarstellung  $X = \sum_i X^i \partial_i$  durch

$$(\text{rot}X)^i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \partial X^k / \partial x^j \quad (i = 1, 2, 3)$$

ausgedrückt wird. Wie stellt sich  $\text{rot}X$  in Kugelkoordinaten (oder noch allgemeiner: in krummlinigen Koordinaten) dar?

*Divergenz eines Vektorfeldes.* Auf einer sogenannten Riemannschen Mannigfaltigkeit läßt sich ein Differentialoperator „div“ konstruieren, der Vektorfelder auf Funktionen abbildet. Im  $E_3$  ist dieser Differentialoperator wie folgt definiert. Sei  $\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  die kanonische Volumenform des  $E_3$ , und sei  $X : E_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein differenzierbares Vektorfeld. Wir setzen  $X$  in  $\Omega$  ein und bilden sodann die Cartan-Ableitung. Die resultierende Differentialform  $d(i_X \Omega)$  hat Grad 3 und läßt sich folglich als Produkt einer Funktion  $f(X) : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Omega$  schreiben:

$$d(i_X \Omega) = f(X) \Omega .$$

Hierdurch wird dem Vektorfeld  $X$  in invarianter Weise seine *Divergenz*  $f(X) =: \text{div}X$  zugeordnet.

*Aufgabe 0.11.3.* Beweise die folgenden Aussagen: (1) Ist  $X = \sum_i X^i \partial_i$  die Koordinatendarstellung bzgl. einer kartesischen Basis des  $E_3$ , so gilt  $\text{div}X = \sum_i \partial X^i / \partial x^i$ . (2)  $\text{div}X$  hängt nicht von der Orientierung ab. (3) Die obige Definition des Divergenzoperators ist äquivalent zu

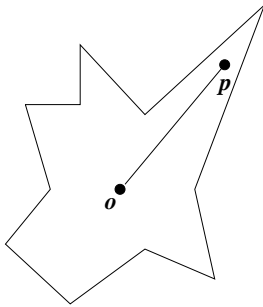
$$\text{div} = \star \circ d \circ \star \circ I .$$

*Aufgabe 0.11.4.* Deduziere aus  $d \circ d = 0$  die Identitäten  $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$  und  $\text{div} \circ \text{rot} = 0$  (im  $E_3$ ).

## 0.12 Poincarésches Lemma

*Definition 0.6.* Sei  $\omega \in \Lambda^k(U)$ . Wir vereinbaren die folgenden Sprechweisen. (1) Erfüllt  $\omega$  die Gleichung  $d\omega = 0$ , so heißt  $\omega$  *geschlossen*. (2) Existiert zu  $\omega$  eine global wohldefinierte  $(k-1)$ -Form  $\theta$  mit der Eigenschaft  $d\theta = \omega$ , so heißt  $\omega$  *exakt*. (3) Die  $(k-1)$ -Form  $\theta$  nennen wir, sofern sie existiert, ein *Potential* von  $\omega$ . Offenbar ist wegen  $d \circ d = 0$  jede exakte Differentialform auch geschlossen. Wie steht es aber mit der Umkehrung? Dazu benötigen wir die folgende Vorbereitung.

*Definition 0.7.* Sei  $A$  ein affiner Raum und  $U \subset A$  offen.  $U$  heißt *sternförmig*, wenn ein Punkt  $o \in U$  existiert mit der Eigenschaft, daß für jedes  $p \in U$  das Geradensegment von  $o$  nach  $p$  ganz in  $U$  enthalten ist. Ein solcher Punkt  $o$  heißt ein *Sternpunkt* von  $U$ .



**Abbildung 0.9.** Ein sternförmiges Gebiet mit Sternpunkt  $o$

*Satz 0.1 (Poincarésches Lemma).* Auf einem sternförmigen Gebiet  $U$  ist jede geschlossene Form  $\omega \in \Lambda^k(U)$  auch exakt.

Das Poincarésche Lemma behauptet mit anderen Worten, daß unter der Voraussetzung der Sternförmigkeit von  $U$  jede  $k$ -Form  $\omega$  mit  $d\omega = 0$  auf  $U$  ein Potential  $\theta$  auf  $U$  besitzt.  $\theta$  ist nicht eindeutig bestimmt. Erfüllt nämlich  $\theta$  die Gleichung  $d\theta = \omega$ , so gilt wegen  $d \circ d = 0$  dieselbe Gleichung für  $\theta + d\psi$  mit beliebigem  $\psi \in \Lambda^{k-2}(U)$ . Die Beweisidee von Satz 0.1 ist unten skizziert.

*Mitteilung.* Die Voraussetzung der Sternförmigkeit läßt sich stark abschwächen. (Zum Beispiel kann die affine Struktur durch die Struktur einer "differenzierbaren Mannigfaltigkeit" ersetzt werden, und für den Fall  $k = 1$  genügt es, wenn  $U$  einfach zusammenhängend ist.) Daß die Aussage aber nicht global gelten kann und irgendeine Voraussetzung notwendig ist, sieht man an dem folgenden Gegenbeispiel. Betrachte die Winkel-1-Form  $\alpha = (x^2 + y^2)^{-1}(xdy - ydx)$  auf  $E_2 \setminus \{o\}$ . Eine kurze Rechnung zeigt, daß  $\alpha$  geschlossen ist, d.h.  $d\alpha = 0$ . Andererseits kann man sich durch Ausprobieren davon überzeugen, daß  $\alpha$  kein Potential hat. Es gilt zwar  $\alpha = d\varphi$  mit



$\varphi = \arctan(y/x)$  gilt, aber  $\varphi$  wächst bei jedem vollständigen Umlauf um  $o$  um  $2\pi$  an und ist daher als Funktion nicht global auf  $E_3 \setminus \{o\}$  definiert. (Den tatsächlichen Beweis, daß  $\alpha$  nicht exakt ist, verschieben wir auf Abschn. 0.17.)

*Beweisidee.* Der Beweis des Poincaréschen Lemmas wird konstruktiv geführt. Für einen Sternpunkt  $o \in U$  und  $k \geq 1$  definiert man einen Operator  $H : \Lambda^k(U) \rightarrow \Lambda^{k-1}(U)$  durch die Formel

$$(H\omega)_p(v^{(2)}, \dots, v^{(k)}) = \int_0^1 s^{k-1} \omega_{o+s(p-o)}(p-o, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}) ds .$$

$H$  hat die interessante Eigenschaft

$$d(H\omega) + H(d\omega) = \omega .$$

Der Nachweis dieser Identität findet sich unten. Damit ist Satz 0.1 aber schon bewiesen, denn unter der Voraussetzung  $d\omega = 0$  folgt sofort  $\omega = d\theta$  mit  $\theta = H\omega$ .

*Mitteilung.* Das Studium von geschlossenen Differentialformen, die nicht exakt sind, ist Thema der Topologie, insbesondere der Theorie von Kohomologiegruppen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

*Nachtrag zum Beweis.* Im folgenden sei  $\omega$  wieder eine  $k$ -Form ( $k \geq 1$ ) auf  $U$  und  $o$  ein Sternpunkt von  $U$ . Wir definieren den Operator  $H : \Lambda^k(U) \rightarrow \Lambda^{k-1}(U)$  wie oben. Um die Identität  $(dH\omega + H d\omega) = \omega$  zu beweisen, untersuchen wir zunächst den ersten Term der linken Seite. Für einen beliebigen Punkt  $p \in U$  gilt

$$\begin{aligned} (Hd\omega)_p(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) &= \int_0^1 s^k d\omega_{o+s(p-o)}(p-o, v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) ds \\ &= \int_0^1 s^k \left( (D_{o+s(p-o)}\omega)(p-o) \right) (v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) ds \\ &\quad + \int_0^1 s^k \sum_{j=1}^k (-1)^j \left( (D_{o+s(p-o)}\omega)(v^{(j)}) \right) (p-o, v^{(1)}, \dots, v^{(j-1)}, v^{(j+1)}, \dots, v^{(k)}) ds . \end{aligned}$$

Die Berechnung des zweiten Terms der linken Seite ergibt

$$\begin{aligned} (dH\omega)_p(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) &= k \int_0^1 s^{k-1} \omega_{o+s(p-o)}(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) ds \\ &\quad + \int_0^1 s^{k-1} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left( (D_{o+s(p-o)}\omega)(sv^{(j)}) \right) (p-o, v^{(1)}, \dots, v^{(j-1)}, v^{(j+1)}, \dots, v^{(k)}) ds . \end{aligned}$$

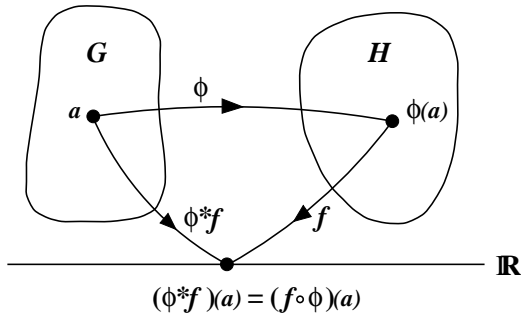
Durch Zusammenfassen beider Ergebnisse erhält man schließlich

$$\begin{aligned} (dH\omega + Hd\omega)_p &= k \int_0^1 s^{k-1} \omega_{o+s(p-o)} ds + \int_0^1 s^k \left( (D_{o+s(p-o)}\omega)(p-o) \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \left( s^k \omega_{o+s(p-o)} \right) ds = \omega_p . \end{aligned}$$

q.e.d.

### 0.13 Pullback

*Pullback einer Funktion.* Gegeben seien zwei affine Räume  $A = (M, U, +)$ ,  $B = (N, V, +)$  und zwei offene Gebiete  $G \subset M$ ,  $H \subset N$ . Gegeben sei weiter eine Abbildung  $\phi : G \rightarrow H$  und eine Funktion  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ . Durch Verkettung von  $f$  mit  $\phi$  entsteht die Funktion  $f \circ \phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ ; man sagt, daß  $f$  mittels  $\phi$  von  $H$  nach  $G$  zurückgeholt wird (Abb. 0.10). Diese Operation des Zurückholens (engl. *pullback*) wird mit  $\phi^* : f \mapsto \phi^* f := f \circ \phi$  bezeichnet.



**Abbildung 0.10.** Pullback einer Funktion  $f$  mittels einer Abbildung  $\phi : G \rightarrow H$

*Pullback von Differentialformen.* <sup>6</sup> Es sei nun zusätzlich die Differenzierbarkeit der Abbildung  $\phi : G \rightarrow H$  vorausgesetzt. Für jeden Punkt  $a \in G$  haben wir dann mit  $\phi : a \mapsto \phi(a)$  auch eine Abbildung  $D_a\phi : U \rightarrow V$  durch die Vorschrift

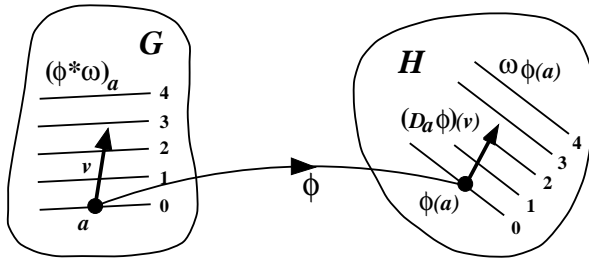
$$v \mapsto (D_a\phi)(v) := \left. \frac{d}{ds} \phi(a + sv) \right|_{s=0}.$$

$D_a\phi$  ist das Differential von  $\phi$  im Punkt  $a$ .  $\phi$  induziert eine Abbildung  $\phi^* : \Lambda^k(H) \rightarrow \Lambda^k(G)$ ,  $\omega \mapsto \phi^*\omega$ , die durch

$$(\phi^*\omega)_a(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) = \omega_{\phi(a)}((D_a\phi)(v^{(1)}), \dots, (D_a\phi)(v^{(k)}))$$

definiert ist.  $\phi^*\omega$  heißt die mittels  $\phi$  von  $H$  nach  $G$  zurückgeholte Differentialform. Die Konstruktion von  $\phi^*\omega$  ist für den Fall einer 1-Form  $\omega$  in Abb. 0.11 illustriert.

<sup>6</sup> Genau genommen unterscheidet man zwischen zwei Typen von Differentialformen, nämlich solchen, die unter orientierungsändernden Abbildungen  $\phi$  in der gewöhnlichen Weise transformieren ( $\omega \mapsto \phi^*\omega$ ) und anderen, die einen zusätzlichen Vorzeichenwechsel erleiden ( $\omega \mapsto -\phi^*\omega$ ). Diese Unterscheidung ist unnötig, wenn man vereinbart, daß nur orientierungserhaltende Abbildungen zugelassen sind, was wir hiermit tun. In Kap.?? werden wir die elektromagnetische Theorie hinsichtlich ihrer Symmetrien untersuchen und insbesondere auch die Invarianz unter Raumspiegelungen herausarbeiten. Dabei wird sich der Unterschied zwischen den zwei Typen von Differentialformen als wesentlich herausstellen.

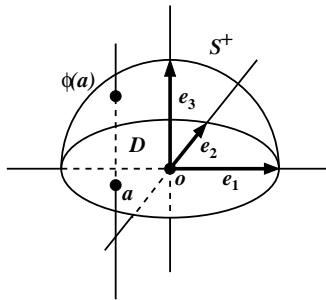


$$(\phi^*\omega)_a(v) = 2.84 = \omega_{\phi(a)}((D_a\phi)(v))$$

**Abbildung 0.11.** Pullback einer 1-Form  $\omega$

*Aufgabe 0.13.1.* Beweise für die Komposition zweier differenzierbarer Abbildungen  $\phi : G \rightarrow H$  und  $\psi : H \rightarrow I$  und eine  $k$ -Form  $\omega$  auf  $I$  die Formel  $(\psi \circ \phi)^*\omega = \phi^*(\psi^*\omega)$ .

*Beispiel 0.13.1.* Sei  $B$  der um den Koordinatenursprung  $o$  zentrierte Einheitsball im  $E_3$  mit der kanonischen Volumenform  $\Omega$ . Der Rand von  $B$  ist die Einheitssphäre  $S$ . Eine den Punkt  $o$  enthaltende Ebene  $E_2$  habe Normalenvektor  $e_3$  und werde durch die Flächenform  $\omega = e_3 \lrcorner \Omega$  orientiert.  $E_2$  zerschneidet  $S$  in zwei Hemisphären, deren obere mit  $S^+$  bezeichnet werde. Weiter sei  $D := E_2 \cap B$  (Einheitskreisscheibe). Wir betrachten nun die Abbildung  $\phi : D \rightarrow S^+$ , die jedem Punkt  $a \in D$  den Schnittpunkt der zu  $E_2$  senkrechten Geraden durch  $a$  mit  $S^+$  zuordnet (Abb. 0.12). Mittels



**Abbildung 0.12.** Illustration der Abbildung  $\phi : D \rightarrow S^+$

dieser Abbildung soll die in Aufgabe 0.10.2 definierte Raumwinkel-Form  $\tau$  von  $S^+$  nach  $D$  zurückgeholt werden. Zu diesem Zweck bemerken wir, daß  $\phi^*\tau : D \rightarrow \text{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$  top-dimensional ist, weshalb eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$\phi^*\tau = f\omega$$

existieren muß. Die Funktion  $f$  berechnen wir wie folgt. Sei  $d(a, o) = r(a)$  der Abstand eines Punktes  $a \in D$  vom Koordinatenursprung  $o$ . Per Definition von  $\phi$  gilt dann:

$$\phi(a) = a + \sqrt{1 - r^2(a)} e_3 ,$$

und Differenzieren ergibt:

$$(D_a \phi)(v) = v - \frac{\langle a - o, v \rangle}{\sqrt{1 - r^2(a)}} e_3 .$$

Wir wenden  $\phi^* \tau$  auf eine zu  $e_3$  senkrechte und bezüglich  $\omega$  positiv orientierte Orthonormalbasis  $e_1, e_2$  an und erhalten per Definition des Zurückholens von Formen den Ausdruck:

$$(\phi^* \tau)_a(e_1, e_2) = \tau_{\phi(a)} \left( e_1 - \frac{\langle a - o, e_1 \rangle}{\sqrt{1 - r^2(a)}} e_3, e_2 - \frac{\langle a - o, e_2 \rangle}{\sqrt{1 - r^2(a)}} e_3 \right) .$$

Die rechte Seite berechnen wir mit Hilfe der in Aufgabe 0.10.2 angegebenen Koordinatendarstellung für  $\tau$ . Kurze Rechnung ergibt den Ausdruck  $(\phi^* \tau)_a(e_1, e_2) = 1/\sqrt{1 - r^2(a)}$ . Mit  $\omega_a(e_1, e_2) = +1$  und  $\phi^* \tau = f\omega$  haben wir dann  $f(a) = 1/\sqrt{1 - r^2(a)}$ , und insgesamt folgt

$$\phi^* \tau = \omega / \sqrt{1 - r^2} .$$

*Pullback vertauscht mit d.* Wir fragen nun, wie sich die Operation des Zurückholens von Differentialformen mit der äußeren Ableitung  $d$  verträgt. Es sei hierfür wie zuvor eine differenzierbare Abbildung  $\phi : G \rightarrow H$  und eine Funktion  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben. Für das Differential der zurückgeholt Funktion  $\phi^* f$  gilt nach der Kettenregel der Differentialrechnung die Gleichung

$$(d(\phi^* f))_a(v) = (d(f \circ \phi))_a(v) = (df)_{\phi(a)}((D_a \phi)(v)) .$$

Die rechte Seite hiervon ist aber per Definition des Zurückholens von Formen gleich  $(\phi^*(df))_a(v)$ . Folglich gilt  $d(\phi^* f) = \phi^*(df)$ . Zur Verallgemeinerung dieses Resultats betrachten wir eine  $k$ -Form der Gestalt  $\omega = f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k$  mit Funktionen  $f_i : H \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ). Dann gilt einerseits

$$\phi^*(d\omega) = \phi^*(df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = \phi^*(df_0) \wedge \phi^*(df_1) \wedge \dots \wedge \phi^*(df_k)$$

und andererseits

$$d(\phi^* \omega) = d((f_0 \circ \phi) \phi^*(df_1) \wedge \dots \wedge \phi^*(df_k)) .$$

Wir wenden die Produktregel für  $d$  an und benützen die eben bewiesene Aussage  $d(f_0 \circ \phi) = \phi^*(df_0)$  und  $d(\phi^*(df_i)) = d(d(\phi^* f_i)) = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Da  $k$ -Formen der betrachteten Gestalt  $\Lambda^k(H)$  aufspannen, folgt die Gleichheit

$$d(\phi^* \omega) = \phi^*(d\omega)$$

für  $\omega \in \Lambda^k(H)$ ,  $k$  beliebig.

Der Spezialfall  $\dim G = k$ . Für die in Abschn. 0.16 erklärte Integration von Differentialformen benötigen wir den Spezialfall, der sich einstellt, wenn wir den Grad der zurückzuziehenden Differentialform mit der Dimension des Raumes, in den sie zurückgeholt wird, gleichsetzen. Die Voraussetzungen seien wieder dieselben wie im vorigen Paragraphen, aber es gelte jetzt speziell  $G \subset \mathbb{R}^k$ . Die Identität

$$\phi^*(f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = (f_0 \circ \phi) \phi^*(df_1) \wedge \dots \wedge \phi^*(df_k)$$

und Anwendung der Rechenregel  $d \circ \phi^* = \phi^* \circ d$  ergibt

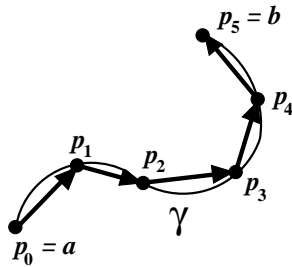
$$\phi^*(f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = (f_0 \circ \phi) d(f_1 \circ \phi) \wedge \dots \wedge d(f_k \circ \phi).$$

Wir setzen  $F_i = f_i \circ \phi$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) und entwickeln die Differentiale  $dF_1, \dots, dF_k$  nach einem Satz von Koordinatenformen  $dx^1, \dots, dx^k$  auf  $G \subset \mathbb{R}^k$ . Es resultiert dann die Formel

$$\phi^*(f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = F_0 \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x^k} \end{pmatrix} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k.$$

## 0.14 Kurvenintegrale

*Heuristische Vorbetrachtung.* Wir legen unseren Betrachtungen wie immer ein offenes Gebiet  $U$  in einem affinen Raum zugrunde.  $\omega$  sei eine 1-Form auf  $U$  und  $\gamma$  ein Weg, der zwei Punkte  $a$  und  $b$  in  $U$  verbindet. (Der Begriff "Weg" wird hier intuitiv gebraucht.) Wir streben eine Definition des *Integrals von  $\omega$  längs  $\gamma$*  an. Dieses Integral werden wir mit  $\int_\gamma \omega$  bezeichnen. Die physikalische Motivation für das Betrachten von Wegintegralen liegt auf der Hand. Stellte  $\omega$  zum Beispiel ein Kraftfeld dar, so wäre  $-\int_\gamma \omega$  die Arbeit, die gegen das Kraftfeld zu verrichten ist, um längs  $\gamma$  von  $a$  nach  $b$  zu gelangen. Eine naheliegende Idee für die Definition des Wegintegrals  $\int_\gamma \omega$  ist die folgende: wähle eine Folge von  $N + 1$  auf  $\gamma$  liegenden Punkten  $p_0 := a, p_1, \dots, p_N := b$  (Abb. 0.13). Werte die 1-Form



**Abbildung 0.13.** Heuristische Definition des Wegintegrals  $\int_\gamma \omega$ : approximiere  $\gamma$  durch einen Polygonzug von Punkten  $p_0, \dots, p_N$  und bilde die Riemann-Summe  $\sum \omega_{p_i}(p_{i+1} - p_i)$ .

$\omega$  in den Punkten  $p_l$  auf den Differenzvektoren  $v_l := p_{l+1} - p_l$  aus ( $l = 0, \dots, N-1$ ) und bilde die Riemannsche Summe  $\sum_{l=0}^{N-1} \omega_{p_l}(v_l)$ . Verfeinere die Punktfolge und erkläre  $\int_{\gamma} \omega$  als den Grenzwert, gegen den die Summe im Limes  $N \rightarrow \infty$  konvergiert. Dieser Definitionsversuch enthält etwas Richtiges, leidet aber unter mehreren Defiziten: (1) Es bleibt ungeklärt, wie weit der Begriff "Weg" gespannt ist. (Eine ordentliche Definition sollte irreguläre Wege, wo die Konvergenz der Summe gefährdet ist, ausschließen.) (2) Die Wahl der Punktefolge  $p_0, \dots, p_N$  und ihre Verfeinerung wäre näher zu spezifizieren. (3) Von einem allgemeinen mathematischen Standpunkt ist es unschön, daß durch die Bildung der Differenzvektoren  $p_{l+1} - p_l$  von der affinen Struktur Gebrauch gemacht wird. Man möchte die Integration von Differentialformen auch für Räume ohne solche Struktur erklären. Um diese Mängel zu beheben und potentiell Benutzermißbrauch vorzubeugen, benötigen wir einige Definitionen.

*Kurven und Tangentenvektoren.* Wir ersetzen den Begriff "Weg" durch den Begriff "Kurve". Unter einer *Kurve* verstehen wir ein Dupel  $\gamma = ([0, 1]; \phi)$  mit  $\phi : [0, 1] \rightarrow U$  einer differenzierbaren Abbildung.  $\phi$  nennen wir eine *Parametrisierung* der Kurve  $\gamma$ . Beachte den Kunstgriff, eine Kurve nicht als eindimensionale Punktmenge, sondern als *differenzierbare Abbildung* des Intervalls  $[0, 1]$  auf eine solche Menge, zu definieren. Damit wird sichergestellt, daß die Bildmenge, die uns als Integrationsweg dienen soll, genügend glatt ist. Sei nun  $x \in [0, 1]$  eine Zahl. Der Vektor

$$\phi'(x) := (D_x \phi)(1) := \left. \frac{d}{ds} \phi(x + s \cdot 1) \right|_{s=0}$$

heißt ein *Tangentenvektor* der Kurve  $\gamma$  im Punkt  $p = \phi(x)$ . Die Gerade durch  $\phi(x)$  in Richtung von  $\phi'(x)$  heißt der *Tangententialraum* von  $\gamma$  im Punkt  $p = \phi(x)$ .

*Kurvenintegral.* Das Integral einer 1-Form  $\omega$  längs einer Kurve  $\gamma = ([0, 1]; \phi)$  wird folgendermaßen erklärt. Seien  $x_l = l/N$  ( $l = 0, \dots, N$ ) reelle Zahlen im Intervall  $[0, 1]$ . Anstatt wie im obigen Versuch den Integrationsweg durch ein Folge von Differenzvektoren  $\phi(x_{l+1}) - \phi(x_l)$  ( $l = 0, \dots, N-1$ ) zu approximieren, verwenden wir jetzt die Tangentenvektoren  $(D_{x_l} \phi)(x_{l+1} - x_l)$  (Abb. 0.14).

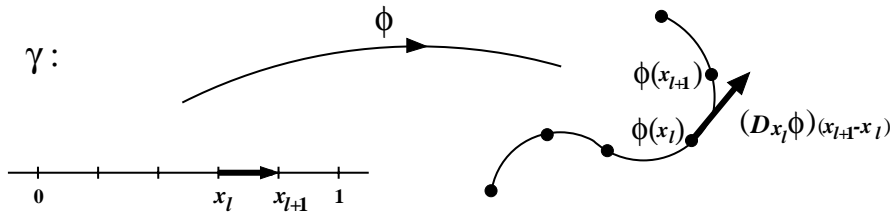
Die Riemannsche Summe

$$\sum_{l=0}^{N-1} \omega_{\phi(x_l)}((D_{x_l} \phi)(x_{l+1} - x_l))$$

strebt für  $N \rightarrow \infty$  gegen einen endlichen Grenzwert. Die Definition

$$\int_{\gamma} \omega := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \omega_{\phi(x_l)}((D_{x_l} \phi)(x_{l+1} - x_l))$$

ist daher sinnvoll. Sie ist mit  $F(x) = \omega_{\phi(x)}((D_x \phi)(1))$  äquivalent zu



**Abbildung 0.14.** Eine Kurve  $\gamma$  wird durch eine differenzierbare Abbildung  $\phi : [0, 1] \rightarrow U$  beschrieben. Mit den Tangentenvektoren  $v_l = (D_x \phi)(x_{l+1} - x_l)$  ist das Kurvenintegral  $\int_\gamma \omega$  definiert als der Grenzwert der Riemann-Summe  $\sum \omega_{\phi(x_l)}(v_l)$ .

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 F(x) dx ,$$

wobei die rechte Seite als gewöhnliches Riemannsches Integral aufzufassen ist. Beachte auch, daß der Ausdruck  $\omega_{\phi(x)}((D_x \phi)(1))$  identisch ist mit der in  $x$  auf  $e = 1$  ausgewerteten 1-Form  $\phi^* \omega$ . Die Berechnungsvorschrift für  $\int_\gamma \omega$  läßt sich deshalb wie folgt in Worte fassen: (1) Hole die 1-Form  $\omega$  mittels  $\phi$  von  $U$  nach  $[0, 1]$  zurück und setze  $\phi^* \omega = f dx$ . (2) Drücke die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $x$  aus:  $f = F(x)$ . (3) Berechne das Riemannsches Integral  $\int_0^1 F(x) dx$ . Das Resultat ist dann gleich  $\int_\gamma \omega$ .

*Beispiel 0.14.1.* Im  $E_2$  mit kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  und Ursprung  $o$  soll das Integral der 1-Form  $A = x dy - y dx$  längs des Einheitskreises  $S^1 = \{p \in E_2 \mid x^2(p) + y^2(p) = 1\}$  (mit Gegenuhrzeigersinn) berechnet werden. Dazu parametrisieren wir  $S^1$  durch  $\phi : [0, 1] \rightarrow S^1$  mit

$$\phi(s) = o + e_x \cos(2\pi s) + e_y \sin(2\pi s) .$$

Das Differential der Abbildung ist

$$(D_s \phi)(1) = \frac{d}{dt} \phi(s + t) \Big|_{t=0} = -2\pi e_x \sin(2\pi s) + 2\pi e_y \cos(2\pi s) ,$$

und Zurückholen der 1-Form  $A$  mittels  $\phi$  ergibt

$$\phi^* A = 2\pi (\cos^2(2\pi s) + \sin^2(2\pi s)) ds = 2\pi ds .$$

Für das Kurvenintegral folgt das Ergebnis

$$\int_{S^1} A = 2\pi \int_0^1 ds = 2\pi .$$

*Reparametrisierungsinvarianz.* Die Definition des Kurvenintegrals erfordert die Parametrisierung des Integrationsweges durch eine Abbildung  $\phi : [0, 1] \rightarrow U$ . Nun ist aber  $\phi$  durch einen vorgegebenen Integrationsweg keinesfalls eindeutig bestimmt, denn für jede differenzierbare Abbildung  $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $\psi(0) = 0$  und  $\psi(1) = 1$  beschreibt die Komposition  $\phi \circ \psi : [0, 1] \rightarrow U$  denselben Weg. Vor dem Hintergrund der anfangs versuchten heuristischen

Definition, die auf  $\phi$  keinen Bezug nahm, erwarten wir natürlich, daß es hierauf nicht ankommen sollte und das Integral  $\int_{\gamma} \omega$  unter der Ersetzung von  $\phi$  durch  $\phi \circ \psi$  seinen Wert behält. Diese Invarianz unter Reparametrisierung liegt in der Tat vor. Es gilt nämlich nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} ((\phi \circ \psi)^* \omega)_x(1) &= \omega_{(\phi \circ \psi)(x)}((D_x(\phi \circ \psi))(1)) \\ &= \omega_{\phi(\psi(x))}((D_{\psi(x)}\phi)(\psi'(x))) = F(\psi(x))\psi'(x), \end{aligned}$$

und die Invarianz ergibt sich rechnerisch als Konsequenz der Substitutionsregel für Riemannsche Integrale:

$$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 F(\psi(x))\psi'(x) dx .$$

Beachte, daß die Substitutionsregel das monotone Anwachsen von  $\psi(x)$  mit  $x$  *nicht* als notwendige Voraussetzung hat, sondern  $\psi'(x) < 0$  auf einem Teil von  $[0, 1]$  zuläßt. Für das Kurvenintegral  $\int_{\gamma} \omega$  bedeutet dies, daß auch Parametrisierungen zulässig sind, die Kehrtwendungen machen und in der Spur des Integrationsweges ein Stück weit zurücklaufen.

*Kovarianz unter Abbildungen.* Aus der Reparametrisierungsinvarianz des Kurvenintegrals folgt sofort sein kovariantes Verhalten unter Abbildungen. Betrachte dazu Abb. 0.15, wo zwei Kurven  $\gamma$  und  $\delta$  mit Parametrisierungen

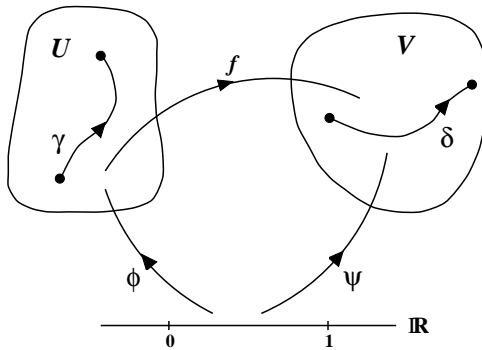


Abbildung 0.15. Skizze zur Kovarianz des Kurvenintegrals

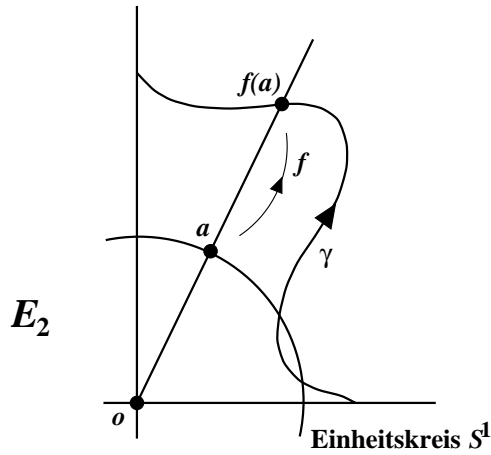
$\phi : [0, 1] \rightarrow U$  bzw.  $\psi : [0, 1] \rightarrow V$  gezeigt sind. Der Weg der Kurve  $\gamma$  werde durch  $f$  auf den Weg von  $\delta$  in differenzierbarer Weise abgebildet. Bijektivität wird von  $f$  nicht gefordert. Für eine 1-Form  $\omega$  auf  $V$  betrachten wir nun die Integrale  $\int_{\delta} \omega$  und  $\int_{\gamma} f^* \omega$ . Zu ihrer Berechnung holen wir  $\omega$  und  $f^* \omega$  nach Vorschrift mittels  $\psi$  bzw.  $\phi$  zurück und integrieren sodann über  $[0, 1]$ . Da  $f \circ \phi$  eine zu  $\psi$  äquivalente Parametrisierung von  $\delta$  ist und außerdem  $\phi^*(f^* \omega) = (f \circ \phi)^* \omega$  gilt, sind die Resultate nach Integration gleich. Es folgt also mit  $\delta = f(\gamma) := ([0, 1]; f \circ \phi)$  das Ergebnis



$$\int_{f(\gamma)} \omega = \int_{\gamma} f^* \omega .$$

*Beispiel 0.14.2.* Sei  $\int_{\gamma} \alpha$  das Kurvenintegral der Winkel-1-Form  $\alpha = (x^2 + y^2)^{-1}(xdy - ydx)$  längs des in Abb. 0.16 skizzierten Integrationsweges in  $E_2 \setminus \{o\}$ . Um dieses Kurvenintegral zu berechnen, bedienen wir uns der Abbildung  $f$ , die jedem Punkt  $a$  auf dem Einheitskreis  $S^1$  um  $o$  den Schnittpunkt  $f(a)$  der Geraden  $\{o + s(a - o) \mid s \in \mathbb{R}\}$  mit dem Integrationsweg zuweist. Aus Aufgabe 0.9.2 ist uns bekannt, daß  $\alpha$  in ebenen Polarkoordinaten  $r, \theta$  den Ausdruck  $\alpha = d\theta$  hat. Hiermit und mit der Rechenregel  $f^* \circ d = d \circ f^*$  holen wir  $\alpha$  mittels  $f$  nach  $S^1$  zurück:  $f^* \alpha = f^*(d\theta) = d(f^* \theta) = d(\theta \circ f)$ . Da  $f$  lokal eine Streckung in Radialrichtung ist, die den Polarwinkel  $\theta$  ungeändert läßt, folgt  $f^* \alpha = d\theta|_{S^1}$  (Einschränkung auf  $S^1$ ), und das zu berechnende Integral hat den Wert

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi/2 .$$



**Abbildung 0.16.** Skizze zu Beispiel 0.14.2

*Integrieren ist die Umkehrung von Differenzieren.* Sei  $f$  eine differenzierbare Funktion und  $\gamma = ([0, 1]; \phi)$  eine Kurve vom Punkt  $a = \phi(0)$  zum Punkt  $b = \phi(1)$ . Per obiger Definition ist das Integral des Differentials von  $f$  längs  $\gamma$  durch das Riemann-Integral  $\int_0^1 F(x) dx$  mit  $F(x) = (\phi^* df)(\partial_x)$  gegeben. Die Rechenregel  $\phi^* \circ d = d \circ \phi^*$  zeigt, daß der Integrand eine Ableitung ist:

$$F(x) = (d \circ \phi^* f)(\partial_x) = \frac{d}{dx}(\phi^* f) = \frac{d}{dx}(f \circ \phi) .$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt daher

$$\int_{\gamma} df = f(\phi(1)) - f(\phi(0)) = f(b) - f(a) .$$

## 0.15 Flächen- und Volumenintegrale im $E_3$

*Perspektive.* Bei der Einführung des Kurvenintegrals von 1-Formen haben wir mit einer heuristischen Diskussion begonnen und im Anschluß daran die mathematisch einwandfreie Definition gegeben. Aus didaktischen Gründen werden wir für Flächen- und Volumenintegrale von 2- bzw. 3-Formen im  $E_3$  genauso vorgehen. Im laufenden Abschnitt präsentieren wir einen heuristischen Zugang, der sich durch Anschaulichkeit auszeichnet und ein unmittelbares Verständnis der Eigenschaften des Integrals eröffnet. Die exakte Formulierung folgt dann in Abschn. 0.16.

*Orientierung von Flächen im  $E_3$ .* Unser erstes Ziel ist es zu erklären, was man sich unter dem Flächenintegral einer 2-Form im dreidimensionalen Euklidischen Raum vorzustellen hat. (Mit dem Wort “Fläche” ist hier das gemeint, was man intuitiv darunter versteht, nämlich eine “glatte” zusammenhängende Punktmenge, die lokal durch zwei Koordinaten beschrieben werden kann. Dazu erinnern wir zunächst an die heuristische Definition des Wegintegrals  $\int_\gamma \alpha$  in Abschn. 0.14. Wir hatten dort im ersten Schritt den Weg  $\gamma$  durch einen Polygonzug angenähert, dann die Vektoren des Polygonzuges in die entsprechenden Ausdrücke für  $\alpha$  eingesetzt und schließlich die Riemann-Summe der resultierenden Werte und ihren Grenzwert gebildet. Wie man diese Konstruktion auf das Flächenintegral einer 2-Form  $\omega$  zu verallgemeinern hat, liegt auf der Hand: wir approximieren die Integrationsfläche  $S$  durch viele kleine Flächenstücke (z.B. Dreiecke), setzen die Kantenvektoren der Flächenstücke in  $\omega$  ein und gehen dann wieder zum Limes der Riemann-Summe über. Im Vergleich zum Wegintegral kommt jedoch als neuer Aspekt hinzu, daß an jedem Diskretisierungspunkt  $p$  jetzt *zwei* Vektoren (sagen wir  $u$  und  $v$ ) einzusetzen sind, und wir wegen des alternierenden Vorzeichens von  $\omega_p(u, v) = -\omega_p(v, u)$  entscheiden müssen, welche Reihenfolge des Einsetzens ( $u, v$  oder  $v, u$ ) die richtige ist. Diese Entscheidung wird ganz allgemein durch die *Orientierung* (Abschn. 0.3 und 0.16) der Fläche getroffen, d.h. durch eine Vorschrift, die zwischen positiv und negativ orientierten Paaren von linear unabhängigen und zu  $S$  tangentialen Vektoren zu unterscheiden gestattet. Im  $E_3$  mit seinen speziellen Eigenschaften können wir die Orientierung durch ein stetiges Normalenvektorfeld<sup>7</sup>  $n$  zusammen mit der Rechte-Hand-Regel fixieren: wir erklären ein Vektorenpaar  $u, v$  im Punkt  $p \in S$  als positiv oder “richtig” orientiert, falls  $u$  und  $v$  (in dieser Reihenfolge) mit dem Normalenvektor  $n(p)$  ein rechtshändiges System bilden. Für unsere gegenwärtigen Zwecke ist eine orientierte Fläche im  $E_3$  also ein glattes zusammenhängendes zweidimensionales Gebiet mit einem stetigen Normalenvektorfeld.<sup>8</sup>

<sup>7</sup> Die globale Existenz eines stetigen Normalenvektorfeldes setzt die “Orientierbarkeit” der Fläche voraus. Nicht alle Flächen sind orientierbar. Ein Beispiel für eine nichtorientierbare Fläche ist das berühmte Möbiusband.

<sup>8</sup> Beachte, daß die Eigenschaft des Senkrechtstehens des Normalenvektors auf der Fläche *nicht* wesentlich ist. Ein anderes, stetiges und nirgendwo zur Fläche tangentiales Vektorfeld würde denselben Zweck erfüllen.

*Flächenintegral durch Triangulation.* Die folgende anschauliche Konstruktion bietet sich jetzt an. Wir überziehen die orientierte Fläche  $S$  mit einem Netz von auf  $S$  liegenden Punkten. Wie in Abb. 0.17 illustriert ist, können wir das Netz auch als *Triangulation*, d.h. als ein Pflaster aus ebenen Dreiecken auffassen.

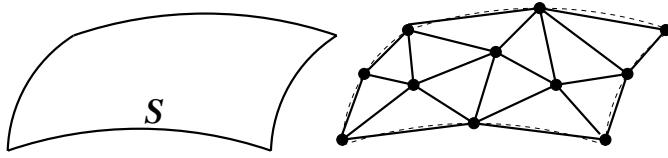


Abbildung 0.17. Triangulation einer Fläche

ecken auffassen. (Beachte, daß ein Pflaster aus ebenen Vierecken *nicht* ohne weiteres möglich ist, da vier Punkte im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen.) Jedes Dreieck  $\Delta$  des Pflasters wird durch einen Basispunkt  $p_\Delta$  und ein positiv orientiertes Paar von Kantenvektoren  $u_\Delta$  und  $v_\Delta$  charakterisiert. Damit betrachten wir nun die Riemann-Summe  $\sum_\Delta \omega_{p_\Delta}(u_\Delta, v_\Delta) / 2$ . Ihr Wert hängt u.a. von der nicht eindeutigen Wahl des Basispunkts für jedes Dreieck ab. Allerdings ist der Unterschied für hinreichend kleine Dreiecke ( $u_\Delta = \epsilon u$ ,  $v_\Delta = \epsilon v$ ) wegen der alternierenden Eigenschaft

$$\omega_p(\epsilon u, \epsilon v) = \omega_p(\epsilon v - \epsilon u, -\epsilon u) = \omega_p(-\epsilon v, -\epsilon v + \epsilon u)$$

und der Stetigkeit von  $\omega$ ,

$$\omega_p(\epsilon u, \epsilon v) = \omega_{p+\epsilon u}(\epsilon u, \epsilon v) + \mathcal{O}(\epsilon^3) = \omega_{p+\epsilon v}(\epsilon u, \epsilon v) + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

von vernachlässigbarer Größenordnung  $\mathcal{O}(\epsilon)$  nach Summation. (Siehe hierzu auch Abb. 0.20.) Deshalb ist es vernünftig zu erwarten, daß die Riemann-Summe unter Verfeinerung der Triangulation gegen einen eindeutigen Grenzwert konvergiert. Dieser Grenzwert ist genau das zu definierende Flächenintegral  $\int_S \omega$ :

$$\int_S \omega = \lim \sum_\Delta \omega_{p_\Delta}(u_\Delta, v_\Delta) / 2.$$

Der Faktor  $1/2$  wird z.B. durch die Beobachtung motiviert, daß der Wert  $\omega_p(u, v)$  für  $\omega = dx \wedge dy$  gleich der Fläche der  $xy$ -Projektion des von  $u$  und  $v$  aufgespannten Parallelogramms ist. Um die Fläche des Dreiecks (anstelle des Parallelogramms) zu erhalten, müssen wir durch 2 dividieren.

*Kovarianz unter Abbildungen.* Zusätzlich zu  $S \subset U$  sei nun eine zweite Fläche  $S' \subset U'$  gegeben, die sich als Bild von  $S$  unter einer orientierungstreuen Abbildung  $\phi: U \rightarrow U'$  darstellen läßt. Dann gilt

$$\int_{\phi(S)} \omega = \int_S \phi^* \omega,$$

wie man auf folgende Weise leicht einsieht. Sei  $\{p_\Delta; u_\Delta, v_\Delta\}$  eine Triangulation von  $S$ . Dann ist das Bild  $\{\phi(p_\Delta); \phi(p_\Delta + u_\Delta) - \phi(p_\Delta), \phi(p_\Delta + v_\Delta) - \phi(p_\Delta)\}$  eine Triangulation von  $S'$ . Per Definition des Zurückholens von Differentialformen gilt

$$(\phi^*\omega)_{p_\Delta}(u_\Delta, v_\Delta) = \omega_{\phi(p_\Delta)}((D_{p_\Delta}\phi)(u_\Delta), (D_{p_\Delta}\phi)(v_\Delta)) ,$$

und mit der Taylorentwicklung

$$(D_p\phi)(\epsilon v) = \phi(p + \epsilon v) - \phi(p) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

erhalten wir näherungsweise

$$\begin{aligned} (\phi^*\omega)_{p_\Delta}(u_\Delta, v_\Delta) &= \\ \omega_{\phi(p_\Delta)}(\phi(p_\Delta + u_\Delta) - \phi(p_\Delta), \phi(p_\Delta + v_\Delta) - \phi(p_\Delta)) &+ \dots \end{aligned}$$

Nach Summation über alle Dreiecke des Pflasters und anschließender Verfeinerung der Triangulation konvergiert die linke Seite gegen  $2 \int_S \phi^*\omega$  und die rechte Seite gegen  $2 \int_{\phi(S)=S'} \omega$ . Das Flächenintegral einer 2-Form verhält sich also kovariant unter Abbildungen, wie behauptet.

*Berechnung durch Parametrisierung.* Die heuristische Definition des Flächenintegrals per Triangulation hat den Vorzug, anschaulich und frei von mathematischem Ballast zu sein. Für praktische Berechnungen eignet sie sich allerdings nicht. Zu diesem Zweck ist es besser, die Fläche geeignet zu parametrisieren. Wir illustrieren das Prinzip am Beispiel eines *zweidimensionalen Quaders*, d.h. einer Fläche  $Q$ , die sich als Bild des Einheitsquadrats  $[0, 1]^2$  unter einer differenzierbaren und orientierungstreuen Abbildung  $\phi$  darstellen läßt. Das Zurückholen von  $\omega$  mittels  $\phi$  resultiert in der Formel  $\int_Q \omega = \int_{[0,1]^2} \phi^*\omega$ . Es seien nun  $e_s, e_t$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$  und  $s, t$  die entsprechenden Koordinaten für das Einheitsquadrat ( $0 \leq s, t \leq 1$ ). Das Integral der zurückgeholten Form  $\phi^*\omega$  ist dann identisch mit dem gewöhnlichen iterierten Riemann-Integral der Funktion  $F(s, t) := (\phi^*\omega)(\partial_s, \partial_t)$ :

$$\int_Q \omega = \int_{[0,1]^2} \phi^*\omega = \int_0^1 \left( \int_0^1 F(s, t) dt \right) ds .$$

In der Tat haben wir die Koordinatendarstellung

$$\phi^*\omega = (\phi^*\omega)(\partial_s, \partial_t) ds \wedge dt = F(s, t) ds \wedge dt ,$$

und indem wir das Einheitsquadrat so triangulieren, daß Paare benachbarter Dreiecke sich jeweils zu einem kleinen Quadrat zusammenfassen lassen (“Quadrangulation”), erhalten wir

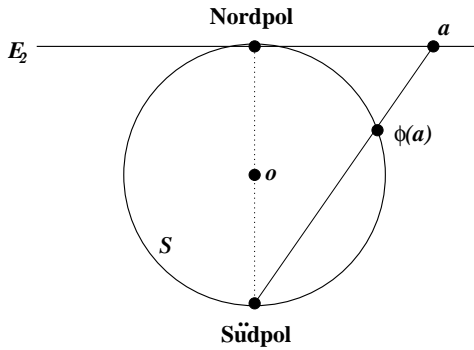
$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} \phi^*\omega &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m,n=0}^{N-1} F(m/N, n/N) (ds \wedge dt)_{(m/N, n/N)}(e_s/N, e_t/N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-2} \sum_{m,n=0}^{N-1} F(m/N, n/N) = \int_0^1 \left( \int_0^1 F(s, t) dt \right) ds , \end{aligned}$$

wie behauptet.

*Beispiel 0.15.1.* Im  $E_3$  mit dem kartesischen Koordinatensystem  $\{o; e_x, e_y, e_z\}$  wollen wir die Raumwinkelform

$$\tau = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$$

über die Einheitskugel  $S := \{p \in E_3 | x^2(p) + y^2(p) + z^2(p) = 1\}$  integrieren. Von den vielen Möglichkeiten der Parametrisierung für  $S$  wählen wir hier die der *stereographischen Projektion*, die folgendermaßen erklärt ist. Seien  $o + e_z$



**Abbildung 0.18.** Stereographische Projektion  $a \mapsto \phi(a)$

und  $o - e_z$  der Nordpol bzw. Südpol der Kugel  $S$ . Die zu  $S$  tangente Ebene durch den Nordpol bezeichnen wir mit  $E_2$ . Dann definieren wir eine Abbildung  $\phi : E_2 \rightarrow S$ , indem wir jedem Punkt  $a \in E_2$  den Schnittpunkt  $\phi(a)$  mit  $S$  der  $a$  mit dem Südpol verbindenden Geraden zuordnen (Abb. 0.18). Elementargeometrische Betrachtungen ergeben die explizite Formel

$$\phi(a) = o - e_z + \frac{4x(a)e_x + 4y(a)e_y + 8e_z}{4 + x^2(a) + y^2(a)}.$$

Die mittels  $\phi$  zurückgeholte Raumwinkelform hat die Koordinatendarstellung

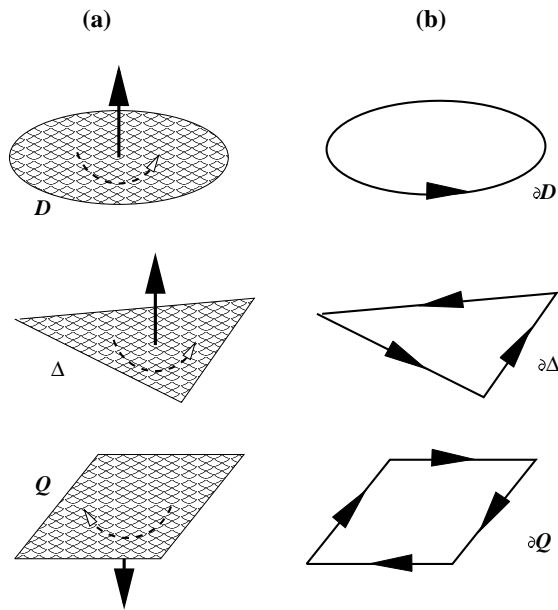
$$\phi^* \tau = \frac{4^2 dx \wedge dy}{(4 + x^2 + y^2)^2}.$$

Folglich berechnet sich der gesamte Raumwinkel zu

$$\begin{aligned} \int_S \tau &= 16 \int_{E_2} \frac{dx \wedge dy}{(4 + x^2 + y^2)^2} = 16 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(4 + x^2 + y^2)^2} \right) dx \\ &= 8\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}^3} = 4\pi. \end{aligned}$$

*Rand einer orientierten Fläche im  $E_3$ .* Wir verstehen intuitiv, was mit dem "Rand" einer Fläche im dreidimensionalen Raum gemeint ist. Der Rand einer Kreisscheibe ist eine Kreislinie, der Rand eines Dreiecks besteht aus drei Geradenstücken, der Rand eines Quadrats aus vier gleichen Kanten usw. Darüber hinaus ist hier festzustellen, daß durch die Orientierung der Fläche auch eine Orientierung auf den Randstücken induziert wird: im  $E_3$  bestimmt

das Normalenvektorfeld der orientierten Fläche zusammen mit der Rechten-Hand-Regel einen Drehsinn (Abb. 0.19a), der seinerseits eine Laufrichtung oder Orientierung für die Randstücke festlegt (Abb. 0.19b). Der orientierte Rand einer Fläche  $S$  wird mit dem Symbol  $\partial S$  bezeichnet.



**Abbildung 0.19.** Teil (b) zeigt den orientierten Rand  $\partial S$  der im  $E_3$  durch ihr Normalenvektorfeld orientierten Fläche  $S$  von Teil (a).

*Satz (Stokes).* Ist  $S$  eine orientierte Fläche mit Rand  $\partial S$ , dann gilt für jede differenzierbare 1-Form  $\omega$

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega .$$

*Beweis (heuristisch).* Wir spalten die Fläche in zwei angrenzende und gleichorientierte Teile auf:  $S = S_1 + S_2$ . Gilt der Satz für  $S_1$  und  $S_2$  separat, so gilt er wegen der Linearität des Integrals ( $\int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega = \int_S \omega$ ) und der Operation der Randbildung ( $\partial S_1 + \partial S_2 = \partial S$ ) auch für die Summenfläche  $S = S_1 + S_2$ . Da wir  $S$  in beliebig guter Näherung durch ein Pflaster winziger ebener Dreiecke approximieren können, genügt es folglich, den Beweis für ein Dreieck  $\Delta$  mit Basispunkt  $p$  und Kantenvektoren  $\epsilon u$  und  $\epsilon v$  im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  zu führen. Betrachte hierzu Abb. 0.20. Das Randintegral ist

$$\int_{\partial \Delta} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\epsilon (\omega_{p+su}(u) + \omega_{p+sv}(-v) + \omega_{p+\epsilon u+s(v-u)}(v-u)) ds \\
 &= \int_0^\epsilon (\omega_{p+\epsilon u-su}(u) - \omega_{p+\epsilon u+s(v-u)}(u) \\
 &\quad - \omega_{p+\epsilon v-sv}(v) + \omega_{p+\epsilon v+s(u-v)}(v)) ds,
 \end{aligned}$$

wobei für das dritte Gleichheitszeichen Variablensubstitutionen (wie  $s \mapsto 1-s$ ) und die Linearität von Linearformen benutzt wurden. Nun haben wir nach Taylor:

$$\begin{aligned}
 \omega_{p+\epsilon v+s(u-v)} - \omega_{p+\epsilon v-sv} &= (D_p\omega)(su) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\
 -\omega_{p+\epsilon u+s(v-u)} + \omega_{p+\epsilon u-su} &= -(D_p\omega)(sv) + \mathcal{O}(\epsilon^2).
 \end{aligned}$$

Mit  $\int_0^\epsilon s ds = \epsilon^2/2$  folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Delta} \omega &= \frac{\epsilon^2}{2} ((D_p\omega)(u))(v) - \frac{\epsilon^2}{2} ((D_p\omega)(v))(u) \\
 &= \frac{\epsilon^2}{2} (d\omega)_p(u, v) + \mathcal{O}(\epsilon^3).
 \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen erkennt das antisymmetrisierte Differential von  $\omega$  als die äußere Ableitung  $d\omega$ . Auf der anderen Seite gilt aufgrund der Definition des Flächenintegrals per Triangulation

$$\int_{\Delta} d\omega = (d\omega)_p(\epsilon u, \epsilon v)/2 + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Vergleich der genäherten Ausdrücke für  $\int_{\partial\Delta} \omega$  und  $\int_{\Delta} d\omega$  zeigt, daß sie mit der erforderlichen Genauigkeit ( $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ , oder  $\mathcal{O}(\epsilon)$  nach Summation über eine Zahl von  $\epsilon^{-2}$  Dreiecken) übereinstimmen. MERKE: die äußere Ableitung  $d$  ist genau so definiert, daß der Stokessche Satz gilt.

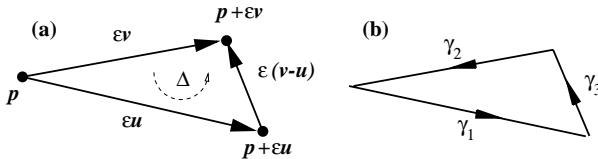


Abbildung 0.20. Skizze zum Beweis des Stokesschen Satzes

Hier fehlt noch einiges zum Thema Volumenintegrale... Benötigt wird auch mehr Diskussion der Randoperation (Linearität und  $\partial \circ \partial = 0$ )... Auch: Differentialform ist die infinitesimale Version des Integrals... Natürlichkeit der Cartan-Ableitung stark betonen (in MERKE...)

## 0.16 Integration von Differentialformen

*Vorbereitung.* In Abschn. 0.14 haben wir das Kurvenintegral einer 1-Form unter Zuhilfenahme einer Parametrisierung  $\phi : [0, 1] \rightarrow U$  erklärt. Dieses Vorgehen läßt sich verallgemeinern und führt zur Definition des Integrals von  $k$ -Formen über  $k$ -dimensionale Gebiete. Um zum Beispiel eine 2-Form über eine Fläche  $S \subset U$  zu integrieren, wählen wir eine Parametrisierung von  $S$  durch  $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ , werten  $\omega$  in den Punkten von  $S$  auf Paaren von Tangentenvektoren aus und berechnen wieder den Grenzwert einer Riemanschen Summe. Um zu entscheiden, in welcher Reihenfolge die Tangentenvektoren einzusetzen sind, benötigen wir eine Orientierung, d.h. eine Vorschrift, die zwischen richtig und falsch orientierten Systemen von Tangentenvektoren unterscheidet.

*$k$ -Zellen.* Das Gesagte motiviert die folgende  $k$ -dimensionale Verallgemeinerung einer Kurve. Sei  $U$  ein  $n$ -dimensionales Gebiet. Wir definieren eine  $k$ -Zelle in  $U$  als ein Tripel  $([0, 1]^k; \phi, \sigma)$ , bestehend aus dem  $k$ -dimensionalen Einheitskubus  $[0, 1]^k := [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$  ( $k$ -faches direktes Produkt) in  $\mathbb{R}^k$ , einer differenzierbaren Abbildung  $\phi : [0, 1]^k \rightarrow U$ , und einer Orientierung  $\sigma$  von  $\mathbb{R}^k$ . Diese Definition ist für  $k = 2$  und  $n = 3$  in Abb. 0.21 illustriert. Außerdem verabreden wir, daß unter einer 0-Zelle in  $U$  ein Punkt von  $U$  zu verstehen ist.

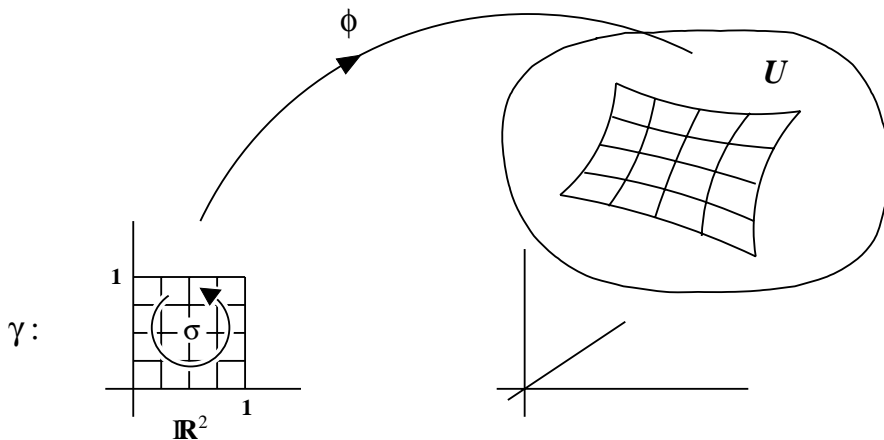


Abbildung 0.21. Zur Definition von  $k$ -Zellen

*Das Integral einer  $k$ -Form über eine  $k$ -Zelle.* Für  $k \geq 1$  sei  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $U$  und  $\gamma$  eine  $k$ -Zelle in  $U$ . Das Integral  $\int_{\gamma} \omega$  ist durch die folgende Berechnungsvorschrift definiert. (1) Hole  $\omega$  mittels  $\phi$  nach  $\mathbb{R}^k$  zurück. (2) Drücke



$\phi^*\omega$  durch die kanonischen Koordinatenfunktionen  $x^i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) aus:

$$\phi^*\omega =: f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k, \quad f =: F(x^1, \dots, x^k).$$

(3) Berechne das  $k$ -dimensionale Riemannsche Integral

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \dots \left( \int_0^1 F(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_k \right) \dots dx_2 \right) dx_1.$$

Die resultierende Zahl ist gleich dem Wert von  $\int_\gamma \omega$ . Zu dieser Definition ist folgendes zu bemerken. (1) Die Orientierung  $\sigma$  der  $k$ -Zelle  $\gamma$  legt eine Reihenfolge der Faktoren in  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$  und somit das Vorzeichen der Funktion  $f$  fest. (2) Das iterierte Riemannsche Integral läßt nach dem Satz von Fubini eine beliebige Reihenfolge für die Ausführung der einzelnen Integrationen zu. (3) Injektivität von  $\phi$  wird nicht gefordert. Die Bildmenge  $\phi([0, 1]^k)$  darf sich selbst kreuzen oder in sich falten. (4) Wie schon im Fall  $k = 1$  ist das Integral  $\int_\gamma \omega$  unter einer orientierungstreuen Reparametrisierung der  $k$ -Zelle  $\gamma$  invariant. Dies wird durch den Transformationssatz für  $k$ -dimensionale Riemannsche Integrale garantiert. (5) Als Konsequenz der Reparametrisierungsinvarianz folgt auch hier sofort

$$\int_{f(\gamma)} \omega = \int_\gamma f^*\omega$$

für jede differenzierbare Abbildung  $f$  und  $f(\gamma) = ([0, 1]^k; f \circ \phi, \sigma)$ .

*Beispiel 0.16.1.* Sei  $\tau$  die in Aufgabe 0.10.2 eingeführte Raumwinkel-Form auf  $E_3 - \{o\}$ . Es soll hier das Integral von  $\tau$  über die um  $o$  zentrierte Einheitssphäre  $S$  berechnet werden. Dazu parametrisieren wir  $S$  durch

$$f : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow E_3, \\ (\theta, \varphi) \mapsto o + \sin \theta \cos \varphi e_1 + \sin \theta \sin \varphi e_2 + \cos \theta e_3.$$

In sphärischen Polarkoordinaten  $\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}$  gilt bekanntlich  $\tau = \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} \wedge d\tilde{\varphi}$ . (Um unnötige Verwirrung zu vermeiden, unterscheiden wir in der Notation zwischen  $\tilde{\theta}, \tilde{\varphi} : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\theta = \tilde{\theta} \circ f, \varphi = \tilde{\varphi} \circ f : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ .) Die mittels  $f$  zurückgeholte Form  $f^*\tau$  hat somit den Ausdruck

$$f^*\tau = f^*(\sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} \wedge d\tilde{\varphi}) = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi,$$

und es folgt

$$\int_S \tau = \int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \sin \theta d\theta \wedge d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) d\varphi = 4\pi.$$

*k*-Kette. Ein wesentliches Element in der Definition des Begriffes *k*-Zelle ist die Differenzierbarkeit der Abbildung  $\phi$ . Diese Eigenschaft garantiert die Existenz von  $\phi^*\omega$  und somit die Existenz des Integrals  $\int_\gamma \omega$ . Nun ist aber die Forderung der Differenzierbarkeit von  $\phi$  für viele Zwecke unbequem. Zum Beispiel könnten wir uns für das Integral einer 2-Form über den Rand eines Würfels oder Zylinders im  $E_3$  interessieren. Ein solcher Rand hat Kanten und läßt sich folglich nicht als Bild von  $[0, 1] \times [0, 1]$  unter einer differenzierbaren Abbildung darstellen. Es bedarf daher einer weiteren Verallgemeinerung. Motiviert durch die Beobachtung, daß ein "kantiger Rand" sich aus mehreren glatten Teilen zusammensetzt, vereinbaren wir die folgende Definition. Eine *Kette  $c$  der Dimension  $k$*  (kurz: *k*-Kette  $c$ ; engl. "*k*-chain") ist eine Linearkombination von *k*-Zellen  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  mit reellen Koeffizienten  $r_1, \dots, r_m$ . In Formeln schreiben wir

$$c = r_1\gamma_1 + \dots + r_m\gamma_m.$$

Eine 0-Kette  $c$  ist eine Linearkombination  $c = r_1a_1 + \dots + r_ma_m$  von Punkten  $a_1, \dots, a_m$ .

*Beispiel 0.16.2 (Der Rand einer k-Zelle).* Wir kommen gleich zu einer praktisch wichtigen Anwendung des Kettenbegriffs. Gegeben sei für  $k > 1$  eine *k*-Zelle  $\gamma = ([0, 1]^k; \phi, \sigma)$ . Der *k*-dimensionale Einheitskubus  $[0, 1]^k$  (gemeint ist hier das "Urbild" der *k*-Zelle) hat  $2k$  Seitenflächen, deren jede sich als  $(k-1)$ -dimensionaler Einheitskubus im  $\mathbb{R}^{k-1}$  auffassen läßt. Ist  $S_j = [0, 1]^{k-1}$  eine dieser Seitenflächen, so bezeichnen wir die Einschränkung der Abbildung  $\phi$  auf  $S_j$  mit  $\phi_j$  ( $j = 1, \dots, 2k$ ). Eine Orientierung  $\sigma_j$  auf  $S_j$  erklären wir wie folgt. Sei  $n$  ein nach außen gerichteter Normalenvektor von  $S_j$ . (Für diesen Schritt wird  $\mathbb{R}^k$  in der üblichen Weise als orientierter Euklidischer Vektorraum aufgefaßt.) Dann deklarieren wir eine geordnete Basis  $e_1, \dots, e_{k-1}$  der  $S_j$  enthaltenden  $(k-1)$ -dimensionalen Hyperebene als positiv orientiert, wenn das System  $n, e_1, \dots, e_{k-1}$  bezüglich  $\sigma$  positiv orientiert ist. Nach diesen Vorbereitungen definieren wir nun den *Rand  $\partial\gamma$  der k-Zelle  $\gamma$*  als die Summe der  $(k-1)$ -Zellen  $(S_j; \phi_j, \sigma_j)$  mit reellen Koeffizienten  $+1$ :

$$\partial\gamma = \sum_{j=1}^{2k} ([0, 1]^{k-1}; \phi_j, \sigma_j).$$

Siehe dazu Abb. 0.22. Für den Spezialfall  $k = 1$  definieren wir  $\partial\gamma$  als die aus dem Endpunkt  $b$  und dem Anfangspunkt  $a$  der Kurve  $\gamma$  bestehende 0-Kette mit reellen Koeffizienten  $+1$  bzw.  $-1$ :  $\partial\gamma = b - a$ . (Achtung! Verwechsle die 0-Kette  $b - a$  nicht mit dem Differenzvektor  $b - a$  zweier Punkte eines affinen Raumes.) Der *Rand  $\partial c$  einer Kette  $c = \sum r_i\gamma_i$*  wird per Linearität erklärt:

$$\partial c = \partial(r_1\gamma_1 + \dots + r_m\gamma_m).$$

*Aufgabe 0.16.1.* Zeige, daß der Rand des Randes einer jeden *k*-Kette verschwindet:  $\partial\partial c = 0$ .

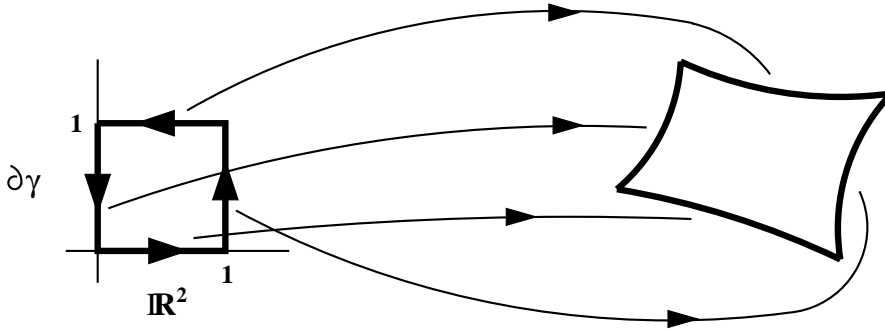


Abbildung 0.22. Der Rand der  $k$ -Zelle von Abb. 0.21

*Definition 0.8.* Für  $k \geq 1$  definieren wir das Integral einer  $k$ -Form  $\omega$  über eine  $k$ -Kette  $c = \sum r_i \gamma_i$  durch

$$\int_c \omega = r_1 \int_{\gamma_1} \omega + \dots + r_m \int_{\gamma_m} \omega .$$

Das "Integral" einer Funktion  $f$  über eine 0-Kette  $r_1 a_1 + \dots + r_m a_m$  ist ganz einfach die Linearkombination der Funktionswerte an den Punkten  $a_1, \dots, a_m$ :

$$\int_{r_1 a_1 + \dots + r_m a_m} f := r_1 f(a_1) + \dots + r_m f(a_m) .$$

Damit haben wir nun einen Integralbegriff, der genügend elastisch ist, um alle für uns interessanten Anwendungen in der Physik zu erfassen.

*Beispiel 0.16.3.* Vielleicht wäre hier noch ein Beispiel angebracht? (Volumen und Oberfläche eines Torus im dreidimensionalen Raum?)

Irgendwo (vielleicht am besten hier) wird noch ein Abschnitt über gerade und ungerade Differentialformen (oder Dichten) benötigt. Dabei wäre auch auf den Unterschied zwischen innerer und äußerer Orientierung einzugehen.

## 0.17 Allgemeiner Satz von Stokes

*Motivation (heuristisch).* Es sei  $U$  ein  $n$ -dimensionales Gebiet, und  $\Lambda^k(U)$  bezeichne wie immer den Raum der  $k$ -Formen auf  $U$ .  $\Lambda^k(U)$  ist ein linearer Raum unendlicher Dimension über dem reellen Zahlenkörper  $\mathbb{R}$ . Eine  $k$ -Kette  $c$  in  $U$  läßt sich als Abbildung

$$c : \Lambda^k(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\omega \mapsto \int_c \omega =: c(\omega)$$

auffassen. Wegen der Linearität des Integrals gelten für  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $\alpha, \beta \in \Lambda^k(U)$  die Gleichungen

$$c(x\alpha + y\beta) = \int_c (x\alpha + y\beta) = x \int_c \alpha + y \int_c \beta = xc(\alpha) + yc(\beta),$$

d.h.  $c$  ist ebenfalls linear. In seiner Eigenschaft als lineare Funktion auf  $\Lambda^k(U)$  ist  $c$  ein Element des Dualraums von  $\Lambda^k(U)$ . Dieser Dualraum ist zwar wie  $\Lambda^k(U)$  unendlich-dimensional, trotzdem dürfen wir getrost seine Existenz unterstellen. (Eine präzise Definition würde die Spezifikation der Differenzierbarkeits- und Trägereigenschaften der Elemente von  $\Lambda^k(U)$  erfordern. Dieser Mühe wollen wir uns hier nicht unterziehen, sondern einfach die vernünftige *Annahme* machen, daß  $\Lambda^k(U)$  und sein Dualraum mathematisch sauber definiert werden können.) Er heiße  $\Lambda_k(U) := \Lambda^k(U)^*$ . Nun erinnern wir an den folgenden, aus der linearen Algebra wohlbekannten Sachverhalt. Sind uns zwei lineare Räume  $V$  und  $W$  und eine lineare Abbildung  $A : V \rightarrow W$  gegeben, so haben wir immer auch eine Abbildung  $A^* : W^* \rightarrow V^*$  der Dualräume durch  $(A^*\omega)(v) = \omega(Av)$ . Die Abbildung  $A^*$  existiert *ungeachtet der Dimension* von  $V$  und  $W$ , sofern nur  $A$  wohldefiniert ist. Eine interessante Konsequenz ergibt sich, wenn wir  $V = \Lambda^k(U)$  und  $W = \Lambda^{k+1}(U)$  setzen und  $A$  mit der äußeren Ableitung  $d : \Lambda^k(U) \rightarrow \Lambda^{k+1}(U)$  identifizieren. Es resultiert dann ein Operator  $d^*$ , der  $(k+1)$ -Ketten auf  $k$ -Ketten abbildet und durch  $(d^*c)(\omega) = c(d\omega)$  definiert ist. Kehren wir jetzt zur Schreibweise von  $c(\omega)$  als Integral zurück, so haben wir

$$\int_c d\omega = \int_{d^*c} \omega.$$

In anderen Worten: wir erwarten aus ganz allgemeinen Gründen, daß das Integral der äußeren Ableitung einer  $k$ -Form  $\omega$  über die  $(k+1)$ -Kette  $c$  gleich dem Integral von  $\omega$  über eine  $k$ -Kette  $d^*c$  ist. Es wäre a priori denkbar, daß  $d^*$  hochpathologische Eigenschaften hat. Daß dem nicht so ist, sondern  $d^*$  sich gutartig verhält und  $d^*c$  mit dem Rand  $\partial c$  von  $c$  zusammenfällt, ist die Aussage des folgenden Satzes. (Ende der Motivation.)

*Satz 0.2 (Allgemeiner Stokesscher Satz).* Sei  $U$  ein  $n$ -dimensionales Gebiet,  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $U$  und  $c$  eine  $(k+1)$ -Kette in  $U$ . Dann ist das Integral der exakten Form  $d\omega$  über  $c$  gleich dem Integral von  $\omega$  über den Rand  $\partial c$ :

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

*Bemerkungen.* (1) Zur Formulierung von Satz 0.2 hat eine Vielzahl von Mathematikern beigetragen, und er heißt ausführlich der Satz von Newton-Leibniz-Gauss-Green-Ostrogradskii-Stokes-Poincaré. Daß man ihn heute kurz nach Stokes benennt, ist eine Konvention, die der historischen Entwicklung nicht völlig gerecht wird. (2) Aus der in der Physik traditionellen Vektoranalysis im dreidimensionalen Euklidischen Raum sind drei Spezialfälle von Satz 0.2 bekannt. Es sind dies die Integralsätze für das Wegintegral des Gradienten einer Funktion, das Flächenintegral der Rotation eines Vektorfeldes

(“Satz von Stokes”) und das Volumenintegral der Divergenz eines Vektorfeldes (“Satz von Gauss”). Beachte allerdings, daß Satz 0.2 im Unterschied zu den drei genannten Integralsätzen keinerlei Gebrauch von einer metrischen Struktur (Euklidisch oder anders) macht.

*Beweis von Satz 0.2.* Um Satz 0.2 zu beweisen, ist es wegen der Invarianz des Integrals unter pullback ausreichend, den Beweis für den Fall zu führen, daß die Kette  $c$  aus einem einzigen  $(k + 1)$ -dimensionalen Kubus  $\gamma = ([0, 1]^{k+1}; \phi, \sigma)$  in  $U$  besteht. Dieser Kubus habe Basispunkt  $p$  und Kantenvektoren  $se_1, \dots, se_{k+1}$  ( $s \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} \phi : \quad & [0, 1]^{k+1} \rightarrow U, \\ & (t_1, \dots, t_{k+1}) \mapsto p + s \sum_{j=1}^{k+1} t_j e_j. \end{aligned}$$

Der Kubus  $\gamma$  läßt sich in viele kleine Teilkuben  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, N^{k+1}$ ) partitionieren, siehe Abb. 0.23, und per Linearität von Integral  $\int$  und Randoperator  $\partial$  gilt

$$\int_{\gamma} d\omega = \sum_i \int_{\gamma_i} d\omega \quad \text{und} \quad \int_{\partial\gamma} \omega = \sum_i \int_{\partial\gamma_i} \omega.$$

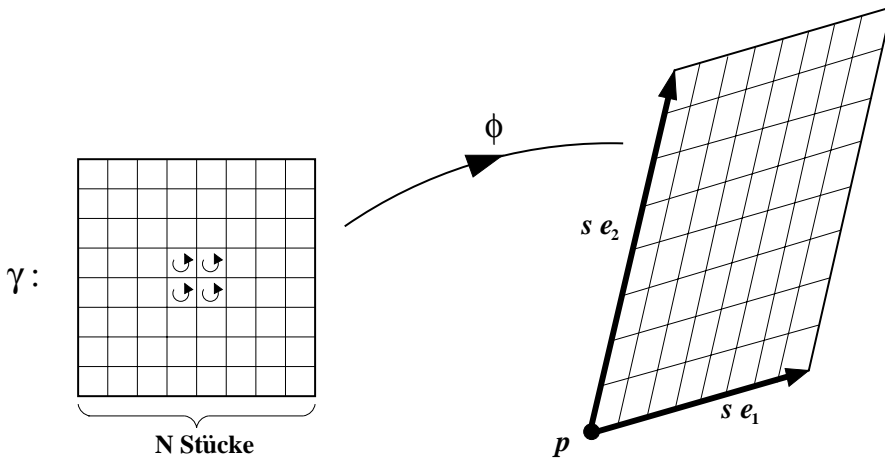


Abbildung 0.23.

Zum Beweis von Satz 0.2 reicht es daher, den reellen Zahlenfaktor  $s$  klein zu wählen und alle Integrale in führender Approximation in  $s$  zu berechnen. Der Rand  $\partial\gamma$  besteht aus  $2(k + 1)$  Kuben  $\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}, \gamma_1', \dots, \gamma_{k+1}'$  der Dimension  $k$ . Der  $k$ -Kubus  $\gamma_j$  ( $j \in \{1, \dots, k + 1\}$ ) hat Basispunkt  $p$  und Kantenvektoren  $se_1, \dots, se_{j-1}, se_{j+1}, \dots, se_{k+1}$ , der  $k$ -Kubus  $\gamma_j'$  hat Basispunkt  $p + se_j$  und dieselben Kantenvektoren wie  $\gamma_j$ . Wir betrachten jetzt speziell  $j = 1$ . Unter Berücksichtigung der Orientierung von  $\gamma_1$  und  $\gamma_1'$  haben wir per Definition des Integrals die Formel

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_1'} \omega = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left( \omega_{p+se_1+s \sum_{i>2} t_i e_i - \omega_{p+s \sum_{i>2} t_i e_i} \right) (se_2, \dots, se_{k+1}) dt_{k+1} \dots dt_2 .$$

Die Differenz  $\omega_{p+se_1+sv} - \omega_{p+sv}$  (mit  $v = \sum_{i>2} t_i e_i$ ) wird in führender Approximation durch  $(D_p \omega)(se_1)$  genähert. Nach dieser Näherung sind die Integrale über  $t_2, \dots, t_{k+1}$  trivial, und ihre Ausführung ergibt

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_1'} \omega = s^{k+1} ((D_p \omega)(e_1))(e_2, \dots, e_{k+1}) + O(s^{k+2}) .$$

Das Integral von  $\omega$  über  $\gamma_j + \gamma_j'$  für  $j \in \{2, \dots, k+1\}$  wird analog berechnet. Aufsummieren aller Randintegrale führt zu dem Zwischenergebnis

$$\begin{aligned} \int_{\partial \gamma} \omega &= \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\gamma_j + \gamma_j'} \omega = \\ &= s^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} ((D_p \omega)(e_j))(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{k+1}) + O(s^{k+2}) . \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite läßt sich, wie man durch Vergleich mit der Definition der äußeren Ableitung in Abschn. 0.11 sieht, auch folgendermaßen schreiben:

$$\int_{\partial \gamma} \omega = s^{k+1} (d\omega)_p(e_1, \dots, e_{k+1}) + O(s^{k+2}) .$$

Damit ist Satz 0.2 bewiesen, denn die rechte Seite der letzten Gleichung ist gerade gleich der führenden Approximation für das Integral  $\int_{\gamma} d\omega$ .

## 0.18 Lie-Ableitung

Gegeben sei auf einem Gebiet  $U \subset A_n$  ein Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : U &\rightarrow \mathbb{R}^n , \\ a &\mapsto X(a) . \end{aligned}$$

Der *Fluß* des Vektorfeldes,  $\phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $(a, s) \mapsto \phi_s(a)$  wird bestimmt durch die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{d}{ds} \phi_s(a) = X(\phi_s(a))$$

mit der Anfangsbedingung  $\phi_{s=0} = \text{id}$ . Insbesondere gilt

$$\left. \frac{d}{ds} \phi_s(a) \right|_{s=0} = X(a) .$$

*Beispiel 0.18.1.* In der klassischen Mechanik hat man das Hamiltonsche Vektorfeld  $X_H = (\partial H/\partial p)\partial_q - (\partial H/\partial q)\partial_p$ . Die Gleichung  $\dot{\phi}_t(a) = X(\phi_t(a))$  ist in diesem Fall eine andere Schreibweise für die kanonischen Bewegungsgleichungen  $\dot{q} = \partial H/\partial p$  und  $\dot{p} = \partial H/\partial q$ . Der Fluß (mit  $s$  gleich der Zeit  $t$ ) beschreibt dann die dynamische Zeitentwicklung. Für den harmonischen Oszillator  $[H = (p^2 + q^2)/2]$  ist  $X = p\partial_q - q\partial_p$  und  $\phi_t$  ist eine Drehung in der  $qp$ -Ebene (Phasenraum) um den Drehwinkel  $2\pi t/T$  ( $T$  ist die Oszillatorperiode).

*Definition 0.9 (Lie-Ableitung).* Ist  $\omega$  eine  $k$ -Form und  $\phi_s$  der Fluß des Vektorfeldes  $X$ , dann wird die *Lie-Ableitung*  $L_X\omega$  von  $\omega$  definiert durch

$$L_X\omega := \left. \frac{d}{ds}\phi_s^*\omega \right|_{s=0}.$$

*Interpretation.* ‘Fischer-Ableitung’... Die Lie-Ableitung einer Funktion  $f$  fällt mit der Richtungsableitung zusammen:

$$L_X f = \left. \frac{d}{ds}\phi_s^* f \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds}(f \circ \phi_s) \right|_{s=0} = (df)(X) = (i_X \circ d)f.$$

*Satz 0.3 (Hauptsatz der Cartanschen Differentialrechnung).*

$$\boxed{L_X = i_X \circ d + d \circ i_X.}$$

*Beweisskizze.*

1. Man zeigt zunächst, daß  $L_X$  eine Derivation der Algebra von Differentialformen ist, d.h. der Leibnizregel genügt:

$$\begin{aligned} L_X(\alpha \wedge \beta) &= \left. \frac{d}{ds}\phi_s^*(\alpha \wedge \beta) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds}(\phi_s^*\alpha \wedge \phi_s^*\beta) \right|_{s=0} = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X\beta). \end{aligned}$$

2. Dann beweist man durch explizites Rechnen und Anwenden der Produktregeln für die Cartan-Ableitung und das innere Produkt, daß  $i_X d + d i_X$  ebenfalls eine Derivation ist.
3. Wegen 1. und 2. genügt der Nachweis des Hauptsatzes für Funktionen  $f$  und 1-Formen  $dg$ :

- a)  $i_X f := 0 \Rightarrow L_X f = i_X df = (i_X d + d i_X)f.$
- b)

$$\begin{aligned} L_X(dg) &= \left. \frac{d}{ds}\phi_s^*(dg) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds}d(\phi_s^*g) \right|_{s=0} \\ &= d(i_X dg) = (d \circ i_X)(dg) = (d i_X + i_X d)(dg). \end{aligned}$$

*Beispiel 0.18.2.* Ein Geschwindigkeitsvektorfeld  $v$  mit Fluß  $\{\phi_t\}$  beschreibe eine zeitunabhängige Strömung, die elektrische Ladungen mit sich trägt und auf diese Weise eine Stromdichte  $j$  bewirkt:

Es folgt eine Relation für die Ladungsdichte  $\rho$ :

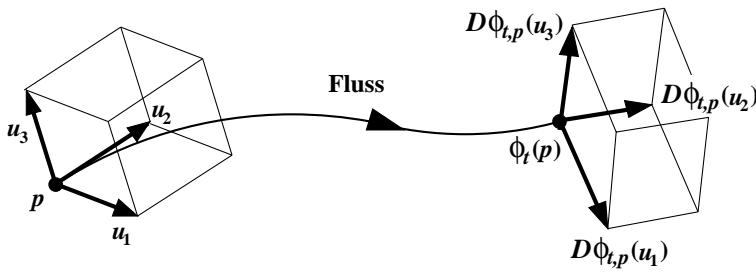


Abbildung 0.24.

$$\rho_p(u_1, u_2, u_3; 0) = \rho_{\phi_t(p)}(D\phi_{t,p}(u_1), \dots; t)$$

oder kurz  $\rho_p(\dots; 0) = (\phi_t^* \rho)_p(\dots; t)$ . Differenzieren nach der Zeit ergibt

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{t=0} + \left( \frac{d}{dt} \phi_t^* \right) \rho \Big|_{t=0}$$

oder  $\dot{\rho} + L_v \rho = 0$ . (In dieser differentiellen Form ist die Gleichung auch für zeitabhängige Vektorfelder und beliebige Zeiten gültig.) Mit  $L_v \rho = (di_v + i_v d)\rho = d(i_v \rho)$  und  $i_v \rho = j$  (Stromdichte) folgt dann die Kontinuitätsgleichung  $\dot{\rho} + dj = 0$  (siehe Abschn. 1.2).

*Beispiel 0.18.3. Induktion in einer bewegten Schleife*

## 0.19 Stromformen und Stromlinien

*Motivation.* In der Physik begegnen wir zuweilen Funktionen und Differentialformen, die Singularitäten aufweisen. Zum Beispiel ist die elektrische Flußdichte eines punktförmigen geladenen Teilchens singularär am Ort des Teilchens. Die Cartan-Ableitung einer solchen Differentialform ist a priori nicht definiert, was den unangenehmen Effekt hat, das Rechnen recht beschwerlich zu machen. Beim Integrieren geht man typisch so vor, daß man eine  $\epsilon$ -Umgebung der Singularität aus dem Integrationsgebiet herausschneidet, was im Falle einer nachfolgenden Anwendung des Satzes von Stokes zu Randtermen führt, die dann sorgfältig diskutiert werden müssen. (Mehrere Beispiele solchen Vorgehens finden sich im Kapitel über ElektroMagnetostatik.) Die hier anzukündigende gute Nachricht lautet, daß derlei Umständlichkeiten vermieden werden können, indem man den mathematischen Rahmen wie unten beschrieben erweitert.

Die Erweiterung hat noch einen zweiten wichtigen Zweck: sie suggeriert die Idee, Differentialformen durch Ketten zu approximieren, was für die Visualisierung des elektromagnetischen Feldes sehr hilfreich ist. Insbesondere werden wir in die Lage versetzt, die magnetische und elektrische Flußdichte im dreidimensionalen Raum durch magnetische bzw. elektrische Flußlinien



veranschaulichen zu können. Im Unterschied zu den “Feldlinien” klassischer Texte zeichnen sich Flußlinien durch eine invariante und metrikfreie Bedeutung aus, die auch der Übertragung zur relativistischen Formulierung im Minkowski-Raum standhält.

*Distributionen.* An den Anfang stellen wir eine kurze Skizze des mathematischen Hintergrunds. In einem  $n$ -dimensionalen Raum (bei unseren limitierten Vorkenntnissen hat dies der  $\mathbb{R}^n$  oder  $A_n$  zu sein, allgemeiner würde man eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit zugrundelegen) betrachten wir die Menge der Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind und zudem kompakten Träger haben, d.h. außerhalb eines beschränkten Gebiets identisch verschwinden. Der reelle Vektorraum solcher “Testfunktionen”, wie sie heißen, wird (in einer bestimmten, hier nicht näher spezifizierten Topologie) mit  $\mathcal{D}$  bezeichnet. Der Fokus richtet sich nun auf den Dualraum  $\mathcal{D}'$ , nämlich den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Elemente von  $\mathcal{D}'$  heißen *Distributionen*. Als prominentes Beispiel für eine Distribution sei die Abbildung angeführt, welche jeder Testfunktion  $f$  ihren Funktionswert im Punkt  $p$  zuweist:

$$\delta^{(p)} : f \mapsto f(p) =: \delta^{(p)}[f].$$

Sie heißt nach ihrem Physiker-Erfinder die *Diracsche  $\delta$ -Distribution bzgl.  $p$* . Der Kalkül mit Distributionen wurde von dem französischen Mathematiker L. Schwartz initiiert und entwickelt. Er zeigte, daß sich fast alle in der Analysis gebräuchlichen Operationen auf Funktionen in sinnvoller Weise auf Distributionen übertragen lassen. Zum Beispiel wird die partielle Ableitung einer Distribution  $T : f \mapsto T[f]$  durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T[f] := -T[\partial f / \partial x^i]$$

sinnvoll erklärt. Wir werden dieses Thema hier nicht elaborieren. Die für die Elektrodynamik benötigten Objekte sind ja die Differentialformen (anstelle der Funktionen), denen wir uns nun zuwenden.

*Stromformen.* Die Erweiterung der Schwartz’schen Theorie zu den Differentialformen wurde von de Rham vorgenommen. Ihm folgend bezeichnen wir den Vektorraum der “Testformen”, d.h. jener Differentialformen, deren Koeffizienten Testfunktionen sind, wieder mit  $\mathcal{D}$  (beachte die Änderung der Bedeutung des Symbols). Der Vektorraum  $\mathcal{D}$  wird durch den Grad  $k$  der Differentialformen graduiert:  $\mathcal{D} = \bigoplus_{k=0}^n A^k$ , d.h.  $A^k$  ist der Vektorraum der  $k$ -Formen in  $\mathcal{D}$ . Wenden wir uns nun wieder dem Dualraum  $\mathcal{D}'$  zu. Dieser besteht aus den stetigen linearen Abbildungen  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto T[\omega]$ . Durch die Graduierung von  $\mathcal{D}$  und die Paarung von  $\mathcal{D}$  mit  $\mathcal{D}'$  wird natürlich eine Graduierung  $\mathcal{D}' = \bigoplus_{l=0}^n A_l$  induziert. Per Konvention ordnet man den Grad in  $\mathcal{D}'$  so zu, daß  $T \in A_{n-k}$  auf dem Komplement von  $A^k$  in  $\mathcal{D}$  Null ist oder, anders ausgedrückt,  $A_{n-k}$  ist mit  $A^k$  gepaart. Sollten diese abstrakten Begriffsbildungen nicht auf Anhieb einleuchten, werden die folgenden Beispiele

helfen. (Bedeutungswechsel von  $\Lambda^k(U)$  gegenüber früher?)

*Beispiel 1:* eine  $k$ -Kette  $c$ . Wie wir ja inzwischen gut verstehen, lassen sich  $k$ -Formen über eine  $k$ -Kette  $c$  integrieren, was eine stetige lineare Abbildung  $c : \Lambda^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$c[\omega] := \int_c \omega ,$$

also ein Element  $c \in A_{n-k}$ , definiert.

*Beispiel 2:* eine  $(n-k)$ -Form  $\eta$ . Wir können eine  $k$ -Form  $\omega \in \Lambda^k$  nehmen, das äußere Produkt mit  $\eta$  bilden und die resultierende  $n$ -Form über den gesamten  $n$ -dimensionalen Raum integrieren. (Die Existenz des Integrals wird durch die Kompaktheit des Trägers von  $\omega$  garantiert.) So bekommen wir wieder eine stetige lineare Abbildung  $\eta : \Lambda^k \rightarrow \mathbb{R}$ , durch

$$\eta[\omega] := \int \eta \wedge \omega . \blacksquare$$

Dem Leser könnte aufgestoßen sein, daß wir den Elementen von  $A_{n-k}$  noch keinen Namen gegeben haben. Nun, de Rham nennt sie “Ströme” (franz. “courants”) vom Grad  $n-k$ . Er denkt dabei an den physikalischen Prototypen der ersten Beispielklasse für  $k=1$ , nämlich die 1-Kette der elektrischen Stromlinien eines bewegten Systems von Punktladungen. Vom Standpunkt des Physikers, insbesondere des Elektrodynamikers, ist diese Wortwahl etwas unglücklich, da der Name “Strom” bereits an eine spezielle physikalische Größe vergeben ist. Aber gegen den “Strom” der etablierten Nomenklatur anzuschwimmen ist aussichtslos, und wir müssen uns deshalb mit dem Kompromiß *Stromformen* abfinden.

*Äußerer Kalkül mit Stromformen.* Kurz gesagt lassen sich praktisch alle für Differentialformen erklärte Operationen auf die Stromformen übertragen: das innere Produkt mit einem Vektorfeld, das äußere Produkt mit Differentialformen, die Operation des Zurückholens mittels einer Abbildung, der Hodgesche Sternoperator und die Cartan-Ableitung. In allen Fällen geschieht die Übertragung durch natürliche Transposition von  $\mathcal{D}$  nach  $\mathcal{D}'$ , und zwar mit derjenigen Wahl des Vorzeichens, welche die resultierende Operation für den Spezialfall einer Differentialform (anstelle einer allgemeinen Stromform) genau so wirken läßt wie gehabt. Es genüge die Illustration dieses Prinzips am Beispiel der äußeren Ableitung. Für jede Differentialform  $\omega \in \Lambda^{n-k-1}$  und eine  $k$ -Form  $\eta$  gilt

$$\int d\eta \wedge \omega = -(-1)^k \int \eta \wedge d\omega .$$

Der sonst beim partiellen Integrieren entstehende Randterm fehlt hier infolge des kompakten Trägers von  $\omega$ . Dementsprechend erklärt man die Cartan-Ableitung eines beliebigen Elementes  $T \in \Lambda_k$  durch

$$dT[\omega] := -(-1)^k T[d\omega] .$$

Da  $d : \Lambda^{n-k-1} \rightarrow \Lambda^{n-k}$  wohldefiniert ist, bekommt man auf diese Weise eine sinnvolle Operation  $d : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_{k+1}$ . Was ergibt nun letztere auf einer  $(n-k)$ -Kette  $c \in \Lambda_k$ ? Die Antwort folgt aus dem Satz von Stokes,

$$dc[\omega] = -(-1)^k c[d\omega] = (-1)^{k+1} \int_c d\omega = -(-1)^k \int_{\partial c} \omega,$$

und sie lautet  $dc = -(-1)^k \partial c$ . Fassen wir also eine  $(n-k)$ -Kette als Stromform in  $\Lambda_k$  auf, so ist die äußere Ableitung der Kette (bis auf  $k+1$  Minuszeichen) gleich ihrem Rand. ...**Andere Operationen:**

$$\mu T[\omega] := T[\mu^* \omega] \quad (\text{Transformationsverhalten unter Abbildung } \mu)$$

$$T \wedge \alpha[\omega] := T[\alpha \wedge \omega] \quad (\text{Dachprodukt mit Differentialform } \alpha)$$

$$\star T[\omega] := (-1)^{\deg(T)(n-\deg(T))} T[\star \omega] \quad (\text{Sternoperator})$$

$$i_v T[\omega] := -(-1)^{\deg(T)} T[i_v \omega] \quad (\text{inneres Produkt mit Vektorfeld } v)$$

*Beispiel 0.19.1.* Als einfaches und doch instruktives Beispiel muß nochmal  $\tau^{(a)}$ , die Raumwinkel-2-Form bzgl.  $a \in E_3$ , herhalten. Im Punkt  $a$  ist  $\tau^{(a)}$  nicht differenzierbar (auf  $E_3 \setminus \{a\}$  ist  $\tau^{(a)}$  bekanntlich geschlossen, doch die Koeffizienten der Differentialform divergieren bei Annäherung an  $a$  wie das inverse Quadrat des Abstandes), weshalb  $\tau^{(a)}$  sicher nicht in  $\Lambda^2(E_3)$  liegt. Da aber das Integral  $\int \tau^{(a)} \wedge \omega$  für alle  $\omega \in \Lambda^1(E_3)$  wohldefiniert ist, können wir den Raumwinkel problemlos als Stromform  $\tau^{(a)} \in \Lambda_2(E_3)$  ansehen und als solche auch sinnvoll differenzieren! Was ist nun in diesem wohlverstandenen Sinn die Cartan-Ableitung  $d\tau^{(a)} \in \Lambda_3(E_3)$ ? Eine kurze Rechnung enthüllt die Antwort:

$$\begin{aligned} d\tau^{(a)}[f] &= - \int \tau^{(a)} \wedge df = - \int \frac{\partial f}{\partial r_a} dr_a \wedge \tau^{(a)} \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial r_a}(r_a, \theta_a, \varphi_a) dr_a \right) \sin \theta_a d\theta_a d\varphi_a \\ &= f(a) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi f(a) = 4\pi \delta^{(a)}[f]. \end{aligned}$$

Was auf der rechten Seite entstanden ist, erkennen wir als die Dirac- $\delta$ -Distribution bzgl.  $a$ , aufgefaßt als Stromform  $\delta^{(a)} \in \Lambda_3(E_3)$ . Dieses Resultat,

$$d\tau^{(a)} = 4\pi \delta^{(a)},$$

ist insbesondere in der Elektrostatik von einigem Nutzen.

**Veranschaulichung der Operationen auf Differentialformen (nicht nur Cartan-Ableitung, sondern auch inneres und äußeres Produkt, und Sternoperator) durch die entsprechenden Operationen auf Ketten. Das äußere Produkt ist natürlich wieder der Durchschnitt der Ketten, beim inneren Produkt benützt man das einzusetzende Vektorfeld, um den Grad der Kette zu**

erhöhen (aus Linien werden Flächen usw.), und der Sternoperator angewendet auf eine Fläche produziert die orthogonalen ‘Haare’ der Fläche usw.

*Regularisierung.* Die Einsicht, daß  $k$ -Ketten und  $(n - k)$ -Formen Elemente ein und desselben Vektorraums  $\mathcal{D}'$  sind, schuf die Grundlage für die Rham'sche zelebrierte Beweisarbeit zur Theorie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und ihrer topologischen Invarianten. Uns suggeriert sie die Idee, *Ketten durch Formen zu approximieren* und umgekehrt. Daß ein solches Bestreben Aussicht auf Erfolg hat und  $k$ -Ketten durch glatte  $(n - k)$ -Formen tatsächlich beliebig gut angenähert werden können, davon überzeugt man sich anhand einiger Beispiele. Lassen Sie uns die  $xy$ -Ebene, die  $z$ -Achse und den Koordinatenursprung im  $E_3$  als Stromformen  $\sigma \in \Lambda_1(E_3)$  bzw.  $\gamma \in \Lambda_2(E_3)$  bzw.  $o \in \Lambda_3(E_3)$  auffassen. Die folgenden drei Grenzwerte für  $f \in \Lambda^0(E_3)$ ,  $\alpha \in \Lambda^1(E_3)$  und  $\omega \in \Lambda^2(E_3)$  prüft man leicht nach:

$$\begin{aligned} o[f] &:= f(o) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (8\pi\epsilon^3)^{-1} \int f e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}/\epsilon} dx \wedge dy \wedge dz, \\ \gamma[\alpha] &:= \int_{z\text{-Achse}} \alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\pi\epsilon)^{-1} \int e^{-(x^2+y^2)/\epsilon} dx \wedge dy \wedge \alpha, \\ \sigma[\omega] &:= \int_{xy\text{-Ebene}} \omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{\epsilon/\pi}{\epsilon^2 + z^2} dz \wedge \omega. \end{aligned}$$

Charakteristisch für die Integranden auf der rechten Seite ist das Auftreten einer durch  $\epsilon$  parametrisierten Familie von Funktionen (hier vom Exponential-, Gauß- bzw. Cauchy-Typ), deren ‘Träger’ im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  auf die Spur (definiert?) der entsprechenden Kette zusammenschrumpft. Die  $\epsilon$ -abhängigen Normierungsfaktoren wurden so gewählt, daß die  $(3 - k)$ -dimensionale, zur Spur der  $k$ -Kette transversale Integration in jedem Punkt der Spur genau Eins ergibt. Auf diese Weise konvergiert für  $\epsilon \rightarrow 0$  das Raumintegral auf der rechten Seite gegen das  $k$ -dimensionale Integral über die  $k$ -Kette. Wir sagen, die Familie von approximierenden Differentialformen sei eine *Regularisierung* der als Stromform aufgefaßten Kette. Eine solche Regularisierung existiert immer. (Jede Kette, und allgemeiner jede Stromform, kann durch infinitesimales ‘Verschmieren’ glatt gemacht werden. Diese Behauptung wurde in einem mathematisch sauber definierten Sinn von Schwartz und de Rham bewiesen.) Die Regularisierung ist offensichtlich nicht eindeutig, wie durch die unterschiedliche Wahl der regularisierenden Familie von Funktionen in den Beispielen illustriert wird. Eindeutig ist lediglich der Limes (die Stromform), gegen den die Approximation für  $\epsilon \rightarrow 0$  konvergiert.

*Diskretisierung.* Oben haben wir ‘Diskretes’ durch ‘Kontinuierliches’ approximiert: durch die Maßnahme der Regularisierung wurde aus einer  $k$ -Kette (oder allgemeiner: einer Stromform  $T \in \Lambda_{n-k}$ ) eine kontinuierliche Differentialform. Interessant ist auch der umgekehrte Weg (‘Diskretisierung’) von

der glatten Differentialform zur "diskreten" Kette. Zum Beispiel können wir eine kontinuierliche Ladungsdichte  $\rho$  im  $E_3$  durch eine Verteilung von Punktladungen  $Q_i$  and Orten  $p_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) annähern. Dazu plazieren wir in Raumbereichen mit hoher Ladungsdichte viele (oder große) Punktladungen, in Raumbereichen mit geringer Ladungsdichte wenige (oder kleine). Das Integral von  $\rho$  gegen eine Testfunktion  $\phi \in \Lambda^0(E_3)$  wird dann durch

$$\int \rho \Phi = \rho[\Phi] \simeq \sum_{i=1}^N Q_i \int_{p_i} \Phi := \sum_{i=1}^N Q_i \Phi(p_i)$$

approximiert. Der 3-Form  $\rho$  entspricht also die 0-Kette  $\sum_i Q_i \times p_i$ . Um die Approximation zu verbessern, machen wir  $N$  größer und verfeinern das System von Punktladungen entsprechend. Ganz ähnlich können wir versuchen, eine kontinuierliche Stromdichte  $j$  im  $E_3$  durch eine Verteilung von Strömen  $I_i$  längs Stromlinien  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) zu beschreiben. Wo die Stromdichte hoch ist, plazieren wir wieder viele Stromlinien (oder wählen die Ströme groß), wo die Stromdichte niedrig ist, dorthin legen wir wenige Stromlinien (oder kleine Ströme). Das Integral von  $j$  gegen eine 1-Testform  $A$  wird dann durch

$$\int j \wedge A = j[A] \simeq \sum_{i=1}^N I_i \int_{\gamma_i} A$$

ersetzt. Der 2-Form  $j$  entspricht also die 1-Kette  $\sum_i I_i \times \gamma_i$ . Um die Approximation zu verbessern, machen wir wieder  $N$  größer und verfeinern das System von Stromlinien.

Allgemeiner können wir auf die beschriebene Weise jede  $n$ -Form im  $n$ -dimensionalen Raum durch eine 0-Kette approximieren, jede  $(n-1)$ -Form durch eine 1-Kette usw. Eine solche Diskretisierung ist für didaktische Zwecke nützlich, weil 1-Ketten sich leichter visualisieren lassen als  $(n-1)$ -Formen.

*Beispiel 0.19.2.* Wir wollen uns überlegen, wie die Veranschaulichung der auf den Koordinatenursprung  $o$  bezogenen Raumwinkel-2-Form  $\tau$  durch eine 1-Kette aussieht. In Kugelkoordinaten  $r, \theta, \varphi$  haben wir  $\tau = \sin \theta d\theta \wedge \varphi$  und  $\tau \wedge \alpha = \tau \wedge \alpha_r dr$  ( $\alpha \in \Lambda^1(E_3)$ ). Das Integral  $\tau[\alpha] = \int \tau \wedge \alpha$  testet also nur die Radialkomponente  $\alpha_r$  von  $\alpha$ . Folglich haben die "Stromlinien" der Stromform  $\tau$  in Radialrichtung zu liegen. Als Randpunkt für die Stromlinien kommt wegen  $d\tau = -\partial\tau = 4\pi\delta^{(o)}$  nur der Koordinatenursprung  $o$  in Frage. Unter Berücksichtigung des richtigen Vorzeichens sind die Stromlinien von  $\tau$  dann Halbachsen oder Strahlen  $\gamma_i$ , die im Punkt  $o$  beginnen und sich bis ins Unendliche erstrecken. Da  $\tau = r^{-2} \partial_r \lrcorner (dx \wedge dy \wedge dz)$  dreihinvariant ist, sind die Strahlen (so gut sich das bei einer endlichen Anzahl einrichten läßt) isotrop anzuordnen. Damit der Rand richtig herauskommt ( $\partial\tau = -4\pi\delta^{(o)}$ ), bekommt jeder Strahl das Gewicht  $4\pi/N$ :

$$\tau \simeq \frac{4\pi}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_i.$$

Abbildung: Veranschaulichung der Raumwinkel-2-Form als isotrope Schar von Strahlen, die im Ursprung  $o$  beginnen und sich bis ins Unendliche erstrecken. Jeder der  $N$  Strahlen trägt das Gewicht  $4\pi/N$ .

*Aufgabe 0.19.1.* Zeige, daß das Integral von  $\tau$  über eine Fläche  $S$  im Stromlinienbild durch  $4\pi/N$  mal der Zahl der  $S$  durchstoßenden Strahlen approximiert wird.

## 0.20 Laplace-Operator

*Laplace-Operator auf Funktionen und 1-Formen im  $E_3$ .* Der Laplace-Operator  $\Delta$  auf den Funktionen im dreidimensionalen Raum wird in kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  bekanntlich durch

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

dargestellt. In der Elektrodynamik haben wir es hauptsächlich mit Differentialformen zu tun. Man wüßte daher gerne, wie der Laplace-Operator im äußeren Kalkül aussieht. Von einer nützlichen Verallgemeinerung z.B. auf 1-Formen im  $E_3$  wird man verlangen

$$\Delta (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = (\Delta A_x) dx + (\Delta A_y) dy + (\Delta A_z) dz .$$

Die Frage ist nun, ob ein solcher Operator existiert und in sinnvoller, d.h. koordinatenunabhängiger Weise definiert werden kann. Die Antwort lautet ja. Dazu bringen wir zunächst den Ausdruck für  $\Delta : \Lambda^0(E_3) \rightarrow \Lambda^0(E_3)$  in koordinatenfreie Form. Eine kleine Rechnung,

$$\begin{aligned} \star d \star df &= \star d \left( \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dy \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \star (dx \wedge dy \wedge dz) = \Delta f , \end{aligned}$$

zeigt, daß  $\Delta$  auf den Funktionen im  $E_3$  mit  $\star d \star d$  übereinstimmt. Während die äußere Ableitung  $d$  den Grad einer Differentialform um Eins erhöht, hat die Verkettung  $\star d \star$  die Eigenschaft, den Grad um Eins zu erniedrigen:

$$\Lambda^{k+1}(E_3) \xrightarrow{\star} \Lambda^{2-k}(E_3) \xrightarrow{d} \Lambda^{3-k}(E_3) \xrightarrow{\star} \Lambda^k(E_3) .$$

Im nächsten Schritt untersuchen wir die Wirkung des Differentialoperators  $\star d \star d$  auf den 1-Formen im  $E_3$ . Die Operatoren  $d$  und  $\star$  sind linear und drehinvariant, weshalb es ausreicht, 1-Formen von der speziellen Gestalt  $f dx$  zu betrachten. In diesem Fall finden wir

$$\begin{aligned} \star d \star d(f dx) &= \star d \left( \frac{\partial f}{\partial z} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dz \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dz - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy . \end{aligned}$$

Zu dem für den Laplace-Operator erwarteten Resultat fehlt offenbar noch etwas. Was hier fehlt, ist nicht schwer zu sehen; es findet sich in

$$\begin{aligned} d \star d \star (f dx) &= d \star \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz . \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen finden wir

$$(- \star d \star d + d \star d \star) (f dx) = (\Delta f) dx ,$$

wie gewünscht. Insgesamt haben wir also die beiden folgenden Formeln für den Laplace-Operator:

$$\begin{aligned} \Delta \text{ auf Funktionen im } E_3 : \quad \Delta &= \star d \star d , \\ \Delta \text{ auf 1-Formen im } E_3 : \quad \Delta &= - \star d \star d + d \star d \star . \end{aligned}$$

Wir sehen, daß in die koordinatenfreie Formulierung des Laplace-Operators die metrische Struktur des Raumes in wesentlicher Weise eingeht. Es ist nun zweckmäßig, einen Operator  $\delta : \omega \mapsto (-1)^k \star d \star \omega$  einzuführen, der  $k+1$ -Formen auf  $k$ -Formen abbildet. Dieser Operator heißt kurz die *Ko-Ableitung*. Mit ihm können wir den Laplace-Operator in der einheitlichen Form  $\Delta = \delta d + d \delta$  schreiben. (Der zweite Term in  $\Delta$  verschwindet auf den Funktionen  $f$  wegen  $\delta f \in \Lambda^{0-1}(E_3) = 0$ .)

*Aufgabe 0.20.1.* Im dreidimensionalen Euklidischen Raum existiert neben dem Gradienten (grad) und der Divergenz (div) auch der Vektordifferentialoperator der Rotation (rot); siehe Abschn. 0.11. Drücke hiermit den Laplace-Operator auf Funktionen bzw. 1-Formen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \Delta \text{ auf } \Lambda^0(E_3) : \quad \Delta &= \text{div} \circ \text{grad} , \\ \Delta \text{ auf } \Lambda^1(E_3) : \quad \Delta &= I \circ (-\text{rot} \circ \text{rot} + \text{grad} \circ \text{div}) \circ I^{-1} . \end{aligned}$$

*Allgemeine Formel für die Koableitung.* Der Differentialoperator  $\delta$  hat die folgende allgemeine Bedeutung. Sei  $U \subset A_n$  ein  $n$ -dimensionales Gebiet mit Sternoperator  $\star : \Lambda^k(U) \rightarrow \Lambda^{n-k}(U)$ . Wir definieren das Skalarprodukt zweier  $k$ -Formen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  auf  $U$  durch

$$(\omega_1 | \omega_2)_U = \int_U \omega_1 \wedge \star \omega_2 .$$

Dieses Skalarprodukt ist symmetrisch,  $(\omega_1 | \omega_2)_U = (\omega_2 | \omega_1)_U$ , und in beiden Argumenten linear. (Unter Vorgabe einer Euklidischen Struktur auf  $U \subset E_n$  ist es auch noch positiv definit, worauf es hier aber nicht ankommt.) Nun ist es bequem, den Raum der Differentialformen vorübergehend dadurch einzuschränken, daß ihr Verschwinden auf dem Rand  $\partial U$  verlangt wird. Für eine  $k$ -Form  $\xi$  und eine  $(k-1)$ -Form  $\eta$  folgt dann durch partielle Integration

$$\begin{aligned} -(\xi|d\eta)_U &= - \int_U d\eta \wedge \star \xi \\ &= (-1)^{k-1} \int_U \eta \wedge d \star \xi = \int_U ((-1)^{k-1} \star^{-1} d \star \xi) \wedge \star \eta, \end{aligned}$$

wobei wegen  $\xi|_{\partial U} = 0 = \eta|_{\partial U}$  kein Randterm entstand. Wir definieren jetzt den Operator  $\delta$  als die Abbildung

$$\begin{aligned} \delta : \Lambda^k(U) &\rightarrow \Lambda^{k-1}(U), \\ \omega &\mapsto \boxed{\delta\omega = (-1)^{k-1} \star^{-1} d \star \omega}, \end{aligned}$$

Die Motivation für diese allgemeine Definition ist, daß mit ihr die Relation

$$-(\xi|d\eta)_U = (\delta\xi|\eta)_U,$$

gilt, d.h.  $\delta$  ist bzgl. des Skalarprodukts (mit der geforderten Randbedingung) zu  $-d$  adjungiert. Aus  $d \circ d = 0$  folgt  $\delta \circ \delta = 0$ . Im  $E_3$ , wo  $\star$  mit seinem Inversen  $\star^{-1}$  zusammenfällt, reduziert sich die allgemeine Definition von  $\delta$  auf die anfangs gegebene.

*Definition 0.10.* Der Laplace-Operator  $\Delta : \Lambda^k(U) \rightarrow \Lambda^k(U)$  ist erklärt durch

$$\boxed{\Delta = \delta \circ d + d \circ \delta}.$$

*Aufgabe 0.20.2.* Zeige die folgenden Eigenschaften des Laplace-Operators:

- (1)  $\Delta d = d\Delta$ , (2)  $\Delta\delta = \delta\Delta$ , (3)  $\star\Delta = \Delta\star$ ,
- (4)  $(\omega_1|\Delta\omega_2)_U = (\Delta\omega_1|\omega_2)_U + \text{Randterme}$ .

*Satz 0.4.* Sei  $dx^1, \dots, dx^n$  eine Basis von Koordinatendifferentialen mit

$$(dx^i, dx^j) \Big|_p = g^{ij},$$

unabhängig von  $p$ . Dann gilt für die Wirkung des Laplace-Operators auf eine  $k$ -Form  $\omega$  mit Koordinatendarstellung

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

die Formel

$$\Delta\omega = \sum g^{ij} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i \partial x^j} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

*Beweisskizze.* Mit der Dualbasis der Vektorfelder  $e_i = \partial_i(p)$  sind uns Projektoren  $\pi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) auf den Vektoren durch  $\pi_i v = \pi_i \left( \sum_j v^j e_j \right) = v^i e_i$  gegeben. Hiermit definieren wir Operatoren  $d_i : \Lambda^k(U) \rightarrow \Lambda^{k+1}(U)$  durch

$$(d_i \omega)_p(v^{(0)}, \dots, v^{(k)}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \left( (D_p \omega)(\pi_i v^{(j)}) \right) (v^{(0)}, \dots, \hat{v}^{(j)}, \dots, v^{(k)}).$$



Diese Operatoren antivertauschen miteinander ( $d_i d_j = -d_j d_i$ ), und ihre Summe ergibt  $\sum_i d_i = d$  (äußere Ableitung). Auf die  $k$ -Form  $\omega$  mit der angegebenen Koordinatendarstellung wirken sie wie folgt:

$$d_i \omega = \sum_{l_1 \dots l_k} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \omega_{l_1 \dots l_k} \right) dx^i \wedge dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k} .$$

Der zu  $-d_i$  (formal) adjungierte Operator  $\delta_i : \Lambda^k(U) \rightarrow \Lambda^{k-1}(U)$  ist  $\delta_i = (-1)^{k-1} \star^{-1} d_i \star$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Auch diese Operatoren antivertauschen ( $\delta_i \delta_j = -\delta_j \delta_i$ ), und ihre Summe ergibt  $\sum_i \delta_i = \delta$ . Ihre Wirkung in Koordinatendarstellung ist

$$\delta_i \omega = \sum_{l_1 \dots l_k} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \omega_{l_1 \dots l_k} \right) I^{-1}(dx^i) \lrcorner (dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k}) ,$$

wie sich mit der Behauptung von Aufg. 0.7.5 verifizieren läßt. Mit Hilfe der Formeln für  $d_i$  und  $\delta_i$  und mit  $I^{-1}(dx^i) = \sum_j g^{ij} \partial_j$  zeigt man ohne Mühe

$$\sum_{ij} (\delta_i d_j + d_j \delta_i) \omega = \sum g^{ij} \frac{\partial^2 \omega_{l_1 \dots l_k}}{\partial x^i \partial x^j} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k} .$$

Andererseits gilt

$$\sum_{ij} (\delta_i d_j + d_j \delta_i) = \delta d + d \delta = \Delta ,$$

womit die Behauptung des Satzes folgt.



# 1. Prinzipien des Elektromagnetismus

## 1.1 Mathematischer Rahmen und Maßsystem

Ziel dieses ersten Kapitels ist es, – im Stile Sommerfelds<sup>1</sup> – das elektromagnetische Feld einzuführen, die fundamentalen Gleichungen der elektromagnetischen Theorie zu formulieren und Vorschriften anzugeben, wie sich die Feldgrößen zumindest im Prinzip (d.h. per Gedankenexperiment) messen lassen. Dabei wird vieles notgedrungen unvollständig bleiben. Einige Gleichungen werden wir ohne weitere Erläuterung einfach *postulieren*. Die Richtigkeit der Postulate folgt aus den Konsequenzen für experimentell beobachtbare Größen, die wir in den darauffolgenden Kapiteln aus den Grundgleichungen ableiten.

Den Kap. 1-?? liegt der dreidimensionale Euklidische Raum  $E_3$  als Modell für den physikalischen Raum zugrunde. Der Zeit wird in diesen Kapiteln eine Sonderrolle zugewiesen, was die volle Schönheit und relativistische Kovarianz der elektromagnetischen Theorie zwar verschleiert, aber den didaktischen Vorteil eines intuitiveren und leichteren Zugangs für den Studenten hat. Wir fassen kurz die wichtigsten Strukturen, Bezeichnungen und Rechenregeln zusammen, von denen wir dann im folgenden ausgiebig Gebrauch machen werden. Der Raum der Differentialformen  $k$ -ten Grades ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) auf  $E_3$  heißt  $\Lambda^k(E_3)$ . Hier sind auch die ungeraden Differentialformen zu erwähnen. Auf dem Differenzvektorraum von  $E_3$  ist ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erklärt. Hierdurch wird ein kanonischer Isomorphismus  $I$  bestimmt, der Vektorfelder auf 1-Formen abbildet.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induziert ein Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot) : \Lambda^k(E_3) \times \Lambda^k(E_3) \rightarrow \Lambda^0(E_3)$ .  $E_3$  wird in der konventionellen Weise durch die Rechte-Hand-Regel für Tripel von Vektoren orientiert, was in Verbindung mit  $(\cdot, \cdot)$  einen Sternoperator  $\star : \Lambda^k(E_3) \rightarrow \Lambda^{3-k}(E_3)$  bestimmt.  $\star$  ist unter Euklidischen Bewegungen invariant. Die Wahl eines kartesischen Koordinatensystems  $(o; e_1, e_2, e_3)$  zeichnet drei Koordinatenformen  $dx = dx^1$ ,  $dy = dx^2$  und  $dz = dx^3$  aus.  $\star$  wirkt auf sie – wie auch auf jede andere lokal orthonormale und rechtshändige Basis – in der folgenden Weise:  $\star dx = dy \wedge dz$ ,  $\star dy = dz \wedge dx$  und  $\star dz = dx \wedge dy$ . Da die Zeitvariable  $t$  in den Kap. 1-5 separat behandelt wird, meint „d“ hier immer die „räumliche“

---

<sup>1</sup> A. Sommerfeld, Elektrodynamik (Vorlesungen über theoretische Physik, Band III), Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948

Cartan-Ableitung. Die partielle Zeitableitung einer Differentialform  $\omega$  wird mit  $\dot{\omega} = \partial\omega/\partial t$  bezeichnet.

Eine detaillierte Einführung in die hier benötigten mathematischen Grundlagen wird in Abschn. 0.1 bis 0.15 gegeben.

*Zum Maßsystem.* Für die quantitative Buchführung bei der Beschreibung rein mechanischer Vorgänge reicht ein Maßsystem aus, das auf den fundamentalen Einheiten von Masse (Kilogramm), Länge (Meter) und Zeit (Sekunde) beruht. Mit der Erweiterung auf elektromagnetische Phänomene kommt als neue und *unabhängige* Qualität physikalischer Körper ihre *elektrische Ladung* hinzu. Es ist unter Theoretikern beliebt, die Ladung zu "mechanisieren" und sie in den Einheiten von  $\text{Masse}^{1/2} \times \text{Länge}^{3/2} \times \text{Zeit}^{-1}$  anzugeben. Dieser Praxis können wir uns nicht anschließen. Wir folgen dem im Jahre 1948 von einer internationalen Kommission empfohlenen Standard („SI-Maßsystem“), nach dem Ladungen in Einheiten von Coulomb gemessen werden. Die Ladungseinheit Coulomb wird im SI-Maßsystem aus der Stromeinheit Ampere = Coulomb/Sekunde als der grundlegenden elektromagnetischen Einheit abgeleitet.

## 1.2 Axiom 1: Erhaltung der elektrischen Ladung

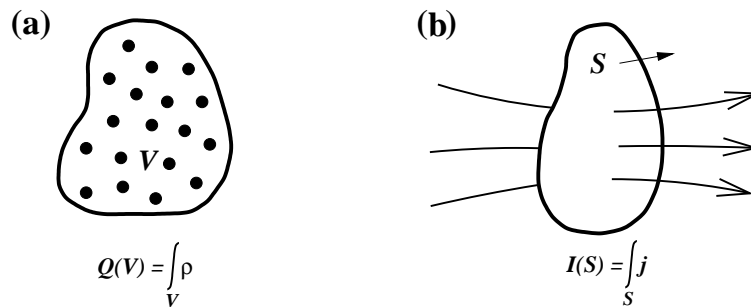
Die Erfahrung zeigt, daß elektrische Ladungen in der mikroskopischen Welt von Atomen und subatomaren Teilchen stets als ganzzahlige Vielfache einer Elementarladung auftreten. So haben das Proton und das Elektron, die zwei Bausteine des Wasserstoffatoms, eine dem Betrag nach gleiche und im Vorzeichen verschiedene Ladung von  $e = 1.602 \times 10^{-19}$  Coulomb. Wir beschreiben diesen Sachverhalt mit der Aussage, die elektrische Ladung sei „quantisiert“.<sup>2</sup> Die Quantisierung der Ladung macht das Bestimmen des Ladungszustandes zu einer im Prinzip sehr einfachen Aufgabe: um die gesamte Ladung  $Q(V)$  in einem Gebiet  $V$  zu ermitteln, müssen wir lediglich die in  $V$  enthaltenen positiven und negativen Elementarladungen abzählen, die Differenz bilden und mit dem Ladungsquantum  $e$  multiplizieren.

Nach dem gegenwärtigen Stand unseres Wissens haben elementare Ladungsträger wie Elektronen oder Quarks keine räumliche Ausdehnung. Ein treues mathematisches Modell müßte demnach ein System von Ladungen als System strukturloser Punkte beschreiben – jedenfalls solange die Heisenbergsche Unschärferelation der Quantenmechanik außer acht gelassen werden kann. Für das Thema dieser Vorlesung, nämlich elektromagnetische Phänomene der makroskopischen Physik, ist die Punktförmigkeit der Ladungen jedoch nicht wesentlich. Wir werden über die diskrete und punktförmige Natur

<sup>2</sup> Quarks, die Konstituenten des Protons und anderer Hadronen, tragen  $\pm 1/3$  oder  $\pm 2/3$  der Elementarladung  $e$ . Übrigens hängt die elektrische Ladung nach den Erkenntnissen der Quantenfeldtheorie als laufende Kopplungskonstante von der Beobachtungsskala ab. Für die klassische Theorie, die es hier zu entwickeln gilt, hat diese Tatsache aber keine wesentlichen Konsequenzen.

der elektrischen Ladungen meist hinwegsehen und ihre räumliche Verteilung als kontinuierlich betrachten.

*Ladungsdichte.* Wie modellieren wir nun eine kontinuierliche Ladungsverteilung auf mathematisch und physikalisch angemessene Art? Diese Frage führt uns zur *elektrischen Ladungsdichte*, die wir mit dem Symbol  $\rho$  bezeichnen. Sie wird durch die Forderung erklärt, daß ihr Integral über ein Gebiet  $V$  mit der in  $V$  enthaltenen Gesamtladung  $Q(V)$  übereinstimmt:  $Q(V) = \int_V \rho$ . Der mathematische Formalismus sagt uns, daß die natürlichen Kandidaten fürs Integrieren unter den Differentialformen zu suchen sind. Da die Gesamtladung durch Integration über dreidimensionale Gebiete zu berechnen ist, könnte ein erster Vorschlag lauten, die Ladungsdichte als 3-Form zu modellieren. Dieser Vorschlag ist akzeptabel, solange wir nicht auf die Orientierung achten (oder Invarianz der Formulierung nur unter orientierungstreuen Transformationen verlangen). Bei sorgfältigem Hinsehen fällt uns aber auf, daß das Integral einer 3-Form die Eigenschaft hat, mit der Orientierung des Gebiets  $V$  das Vorzeichen zu wechseln, wogegen die in  $V$  enthaltene Gesamtladung von der Orientierung des Gebiets unabhängig ist – sie wird wie gesagt ganz einfach durch Abzählen der Elementarladungen ermittelt. Um diese Diskrepanz zu beheben, modellieren wir die Ladungsdichte als *ungerade 3-Form* oder *3-Dichte*. Das Integral der Ladungsdichte ist dann automatisch von der Orientierung des Gebiets unabhängig (und läßt sich sogar für nichtorientierbare Gebiete erklären).<sup>3</sup>



**Abbildung 1.1.** Zur definierenden Meßvorschrift für (a) die Ladungsdichte  $\rho$  und (b) die Stromdichte  $j$ . Die positive Stromrichtung ist durch einen Normalenvektor der Fläche  $S$  gegeben.

<sup>3</sup> Traditionell meint man mit dem Begriff „Ladungsdichte“ nicht die Differentialform  $\rho$  an sich, sondern die ihr durch eine Basis von Koordinatenformen  $dx^1, dx^2, dx^3$  zugeordnete skalare Komponente  $\rho_{123}$ . Als koordinatenfrei definierte Größe ist  $\rho$  fundamentaler und nützlicher als  $\rho_{123}$ . Wir setzen uns deshalb über die Tradition hinweg und übertragen den Namen Ladungsdichte von  $\rho_{123}$  auf  $\rho$ . Eine analoge Bemerkung gilt für die elektrische Stromdichte  $j$  und ihre Komponenten  $j_{12}, j_{23}, j_{31}$ .

*Stromdichte.* Die pro Zeiteinheit durch eine Fläche  $S$  strömende Ladungsmenge heißt der *Strom* durch  $S$  und wird mit  $I(S)$  bezeichnet. Zur quantitativen Beschreibung einer kontinuierlichen Stromverteilung bedient man sich der *elektrischen Stromdichte*  $j$ . Erklärt wird sie durch die Forderung der Gleichheit von  $I(S)$  mit dem Integral von  $j$  für beliebiges  $S$ :  $I(S) = \int_S j$ . Da das Integrationsgebiet  $S$  zweidimensional ist, wäre es mathematisch am natürlichsten,  $j$  als Differentialform zweiten Grades zu definieren. Eine solche Definition führt aber wieder zu Widersprüchen, sobald orientierungsändernde Abbildungen zugelassen werden. Zum Beispiel ändert der elektrische Strom unter Raumpiegelung seinen Richtungssinn, während eine gewöhnliche 2-Form unter derselben Abbildung ihr Vorzeichen beibehält. Wie schon bei der Ladungsdichte ist auch hier der physikalisch korrekte Ansatz, die Stromdichte als Differentialform vom *ungeraden* Typus zu erklären. Wir modellieren  $j$  also als ungerade 2-Form. Das anschauliche Bild für  $j$  besteht dann aus Stromlinien, die mit einem Richtungssinn versehen sind (Abb. 1.1). Man beachte, daß es zur Integration der ungeraden 2-Form  $j$  keines Orientierungssinnes der Fläche  $S$  bedarf, sondern lediglich der Angabe einer positiven Stromrichtung (z.B. durch einen Normalenvektor).

*Koordinatendarstellung und physikalische Dimension.* In Koordinatendarstellung schreiben wir

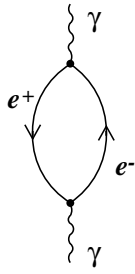
$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad \text{und} \\ j &= j_{12} dx^1 \wedge dx^2 + j_{23} dx^2 \wedge dx^3 + j_{31} dx^3 \wedge dx^1 . \end{aligned}$$

Die Komponenten  $\rho_{123}$  und  $j_{12}, j_{23}, j_{31}$  sind Funktionen:  $\text{Raum} \times \text{Zeit} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sie haben die physikalische Dimension  $[\rho_{123}] = \text{Ladung/Volumen}$  und  $[j_{12}] = [j_{23}] = [j_{31}] = \text{Strom/Fläche}$ . Da die Koordinaten-1-Formen  $dx^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Dimension einer Länge tragen, haben wir für  $\rho$  und  $j$  die „absoluten“ physikalischen Dimensionen

$$[\rho] = \text{Ladung}, \quad \text{und} \quad [j] = \text{Strom} .$$

Daß  $\rho$  und  $j$  von der Wahl der Längeneinheit unabhängig sind, folgt unmittelbar aus ihrer Definition. Betrachten wir zum Beispiel die  $\rho$  definierende Gleichung  $Q(V) = \int_V \rho$ . Die linke Seite wird (auf mikroskopischer Ebene) durch Abzählen von Elementarladungen berechnet, die rechte Seite verwendet Einsetzen von Vektoren in alternierende Multilinearformen und Berechnung von Riemannschen Summen. Keine dieser Operationen erfordert Längen- oder Winkelmessung.  $\rho$  ist also, wie wir sagen, *metrikfrei* erklärt. Das gleiche gilt für  $j$ .

*Kontinuitätsgleichung.* Es ist eine Erfahrungstatsache, daß elektrische Ladung nicht plötzlich aus dem Nichts auftaucht oder ins Nichts verschwindet. Zwar können in elementaren Prozessen  $N_i$  Teilchen in  $N_f$  andere Teilchen umgewandelt werden, aber dies geschieht immer so, daß gleich viel positive wie negative Ladung erzeugt oder vernichtet wird. Wir sagen daher, Ladung



**Abbildung 1.2.** In der Quantenelektrodynamik können Paare von Elektronen ( $e^-$ ) und Positronen ( $e^+$ ) aus einem Photon ( $\gamma$ ) erzeugt werden oder sich unter Bildung eines Photons vernichten. Die elektrische Ladung bleibt dabei erhalten.

sei *erhalten*. Ihren mathematischen Ausdruck findet diese Gesetzmäßigkeit in der sogenannten *Kontinuitätsgleichung*:

$$\text{Axiom 1 : } \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho + \int_{\partial V} j = 0 .}$$

Sie besagt in Worten, daß die zeitliche Änderung der in einem Gebiet  $V$  enthaltenen Ladungsmenge mit einem dem Betrag nach gleichen und im Vorzeichen umgekehrten Stromfluß durch den Rand von  $V$  einhergehen muß. Wir können diesen Sachverhalt auch als differentielles Gesetz formulieren. Der Stokesche Satz gestattet uns, das Flächenintegral von  $j$  über  $\partial V$  in das Volumenintegral  $\int_V dj$  umzuformen. Da  $V$  beliebig ist, folgt

$$\dot{\rho} + dj = 0 ,$$

oder in Koordinatendarstellung

$$\dot{\rho}_{123} + \frac{\partial j_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial j_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial j_{12}}{\partial x^3} = 0 .$$

Wir haben das Gesetz der Ladungserhaltung diesem Kapitel vorangestellt, weil es am Anfang der historischen Entwicklung der Elektrizitätslehre steht und, wie wir gleich sehen werden, die Form der inhomogenen Maxwell-Gleichungen festlegt.

*Aufgabe 1.2.1.* Die lokale Strömungsgeschwindigkeit in einem einkomponentigen Plasma, z.B. einem Elektronengas, werde durch ein Vektorfeld  $v : \text{Raum} \times \text{Zeit} \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschrieben. Zeigen Sie, daß in diesem Fall zwischen Ladungsdichte  $\rho$  und Stromdichte  $j$  der Zusammenhang  $j = \iota(v)\rho$  besteht.

### 1.3 Konsequenzen der Ladungserhaltung: die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

*Die elektrische Erregung.* Als 3-Form hat die Ladungsdichte  $\rho$  im dreidimensionalen Raum den maximalen Grad. Sie ist daher automatisch geschlossen ( $d\rho = 0$ ). Nach dem Poincaréschen Lemma folgt dann sofort die Existenz eines Potentials auf jedem sternförmigen Teilgebiet  $U$  des Raumes:

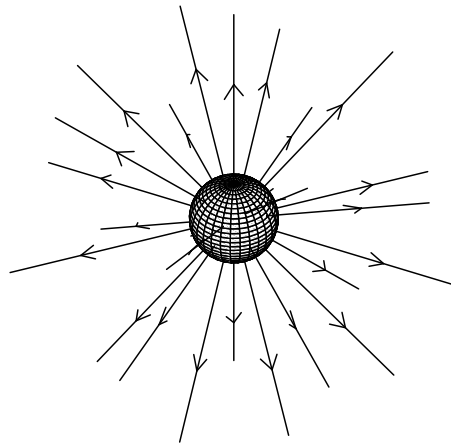
$$dD = \rho .$$

Dieses Potential  $D$ , eine 2-Form, nennen wir die *elektrische Erregung*, was zum Ausdruck bringt, daß die Anwesenheit elektrischer Ladungen den umliegenden Raum in gewissem Sinne anregt. Da  $\rho$  eine Differentialform vom ungeraden Typ ist und die Cartan-Ableitung lediglich differenziert und den Typ nicht ändern kann, muß  $D$  wie  $\rho$  ungerade sein.

Wir erhalten ein zu  $dD = \rho$  äquivalentes Gesetz, indem wir über ein beliebiges Gebiet  $V$  integrieren und auf der linken Seite den Stokesschen Satz anwenden. Die resultierende Beziehung heißt das *Gaußsche Gesetz*:

$$\int_{\partial V} D = \int_V \rho .$$

In Worten besagt es, daß das Flächenintegral der elektrischen Erregung über den Rand eines Gebietes  $V$  gleich der gesamten in  $V$  enthaltenen Ladung ist. Dieser Sachverhalt suggeriert die anschauliche Vorstellung von der elek-



**Abbildung 1.3.** Elektrische Flußlinien einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

trischen Erregung als einer *elektrischen Flußdichte*, d.h. der Stromdichte eines *elektrischen Flusses*, der aus elektrischen Ladungen herausquillt und von dort nach außen strömt. Wir sagen auch, Ladungen seien die *Quellen des elektrischen Flusses*. In Abb. 1.3 wird der elektrische Fluß einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung durch sogenannte *Flußlinien* bildlich dargestellt.<sup>4</sup> Die physikalische Dimension von  $D$  ist<sup>5</sup>

<sup>4</sup> Die präzise Formulierung des Flußlinienbildes wird in Abschn. 1.6 gegeben.

<sup>5</sup> Eine Dimension Länge geht hier *nicht* ein.  $D$  ist ja metrikfrei erklärt und folglich auch längenunabhängig.



$[D] = \text{Ladung}$  .

In Koordinatendarstellung  $D = \sum_{i < j} D_{ij} dx^i \wedge dx^j$  hat das differentielle Gesetz  $dD = \rho$  die Gestalt

$$\frac{\partial D_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial D_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial x^3} = \rho_{123} .$$

Die Komponenten von  $D$  tragen die physikalische Dimension  $[D_{ij}] = \text{Ladung/Fläche}$ . Man beachte auch, daß die Forderung  $dD = \rho$  die elektrische Erregung nicht eindeutig bestimmt. Erfüllt nämlich  $D$  diese Forderung, so gilt wegen  $d \circ d = 0$  dasselbe für  $D + d\theta$ . Die eindeutige Festlegung von  $D$  erfolgt über zusätzliche Relationen, die wir in den Abschn. 1.5 und 1.7 vorstellen. Als Konsequenz dieser Relationen ist  $D$  zum Beispiel vom Bewegungszustand der Ladungen abhängig. Eine Meßvorschrift für  $D$  wird in Abschn. 1.9 nachgereicht.

*Die magnetische Erregung.* Im nächsten Schritt betrachten wir die Summe aus der elektrischen Stromdichte  $j$  und der Zeitableitung der elektrischen Erregung  $D$ . Beide sind ungerade 2-Formen und haben die physikalische Dimension Ladung/Zeit. Die Summe  $j + \dot{D}$  ist somit eine mathematisch wie dimensionsmäßig sinnvolle Größe. Außerdem ist sie geschlossen:

$$d(j + \dot{D}) = 0 ,$$

was mit dem Gaußschen Gesetz  $dD = \rho$  sofort aus der Kontinuitätsgleichung  $dj + \dot{\rho} = 0$  folgt. Das Poincarésche Lemma garantiert dann wieder die Existenz eines Potentials auf jedem sternförmigen Gebiet  $U$  des dreidimensionalen Raumes:

$$j + \dot{D} = dH .$$

Diese Gleichung heißt das *Ampère-Maxwell-Gesetz* in differentieller Form. Die 1-Form  $H$  trägt den Namen *magnetische Erregung*<sup>6</sup> und hat die physikalische Dimension

$$[H] = \text{Strom} .$$

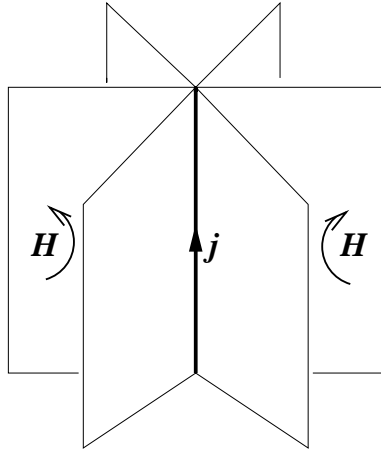
Aus Gründen mathematischer Konsistenz müssen wir verlangen, daß  $H$  mit  $j$  und  $\dot{D}$  eine Differentialform vom ungeraden Typ ist.

Auch hier ist es der anschaulichen Vorstellung dienlich, das differentielle Gesetz  $dH = j + \dot{D}$  in integrale Form umzuschreiben. Durch Integration über eine beliebige Fläche  $S$  und Anwenden des Stokesschen Satzes bekommen wir

$$\int_{\partial S} H = \int_S (j + \dot{D}) .$$

<sup>6</sup> Wir machen uns hier die Sprechweise Sommerfelds zueigen, die sich durch besondere Prägnanz und Systematik auszeichnet.

Das Linienintegral von  $H$  längs einer geschlossenen Kurve  $\partial S$  ist also gleich dem Integral von  $j + \dot{D}$  über eine von  $\partial S$  berandete Fläche  $S$ . Hieraus resultiert die bildliche Vorstellung (Abschn. 1.6), daß der um die zeitliche Änderung des elektrischen Flusses ergänzte elektrische Strom von einem magnetischen *Wirbelfeld* begleitet ist. Das Integral  $\int_{\gamma} H$  nennen wir die *magnetische Spannung* längs des Weges  $\gamma$ .



**Abbildung 1.4.** Magnetische Erregung eines unendlich langen geraden stromtragenden Leiters.

In Koordinatendarstellung  $H = \sum H_i dx^i$  gliedert sich das differentielle Gesetz  $dH = j + \dot{D}$  in drei skalare Gleichungen auf. Die erste davon lautet

$$\frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{\partial H_1}{\partial x^2} = j_{12} + \dot{D}_{12},$$

die anderen zwei entstehen durch zyklisches Vertauschen der Indexmenge  $\{1, 2, 3\}$ . Die Komponenten von  $H$  haben die physikalische Dimension  $[H_i] = \text{Strom/Länge}$ .

Was oben für  $D$  gesagt wurde, gilt gleichermaßen für  $H$ : mit  $H$  ist auch  $H + df$  ( $f$  eine Funktion) eine Lösung der Gleichung  $dH = j + \dot{D}$ . Folglich wird  $H$  erst durch die Angabe zusätzlicher Relationen eindeutig bestimmt. Eine Meßvorschrift für  $H$  findet sich in Abschn. 1.9. Es sei auch darauf hingewiesen, daß die Unbestimmtheit von  $D$  durch die Gleichung  $dD = \rho$  unserem logischen Aufbau keinen Abbruch tut. Der Übergang von  $D$  zu  $D + d\theta$  erfordert lediglich die Ersetzung von  $H$  durch  $H - \dot{\theta}$ .

Die Gleichungen  $dD = \rho$  und  $dH = j + \dot{D}$  heißen insgesamt die *inhomogenen Maxwell-Gleichungen*. Wie gezeigt wurde, sind sie eine unmittelbare Konsequenz des Axioms der Ladungserhaltung. Im Kapitel über die relativistisch kovariante Formulierung der Elektrodynamik werden wir sie zu einem einzigen Gesetz vereinigen.

*Ladungsneutralität des Universums.* Es ist noch auf eine Subtilität bei der Herleitung des Gaußschen Gesetzes hinzuweisen. Wir waren dabei von der

Geschlossenheit der Ladungsdichte  $\rho$  im dreidimensionalen Raum ausgegangen und hatten aus dem Poincaréschen Lemma gefolgert, daß  $\rho$  auf jedem sternförmigen Teilgebiet des Raumes ein Potential  $D$  hat. Da wir als Modell für den Raum den  $E_3$  zugrunde legen und  $E_3$  selbst sternförmig ist, hätten wir auf den Zusatz „sternförmiges Teilgebiet“ auch verzichten können. Interessant wird es jedoch, wenn wir  $E_3$  als Modell für den Raum durch eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $V$ , die *geschlossen* ist ( $\partial V = 0$ ), ersetzen. Unter der Forderung, daß die Gleichung  $dD = \rho$  *global* auf  $V$  gültig sei, haben wir dann

$$Q := \int_V \rho = \int_V dD = \int_{\partial V} D,$$

und mit  $\partial V = 0$  folgt das Verschwinden der Gesamtladung  $Q$ . Offensichtlich reicht die Gleichung  $d\rho = 0$  für die globale Existenz von  $D$  im allgemeinen nicht aus. In einem räumlich geschlossenen Universum ist auch noch seine *Ladungsneutralität* notwendige Voraussetzung. Anschaulich läßt sich dies so verstehen, daß in einem endlichen Raum der aus einer positiven Ladung hervorquellende elektrische Fluß sich nicht im Unendlichen „verlieren“ kann, sondern auf einer negativen Ladung gleicher Größe enden muß.

## 1.4 Axiom 2: Feldstärken und Kraftwirkung

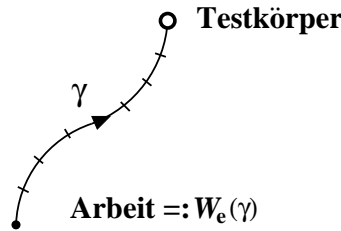
*Die elektrische Feldstärke.* Die Beobachtung zeigt, daß ein elektrisch geladener Körper im ladungserfüllten Raum einer räumlich veränderlichen Kraft unterliegt, die zu seiner Ladung proportional ist. Die Ursache dieses *elektrischen Kraftfeldes* ist das Vorhandensein einer den Raum erfüllenden Qualität, die wir die *elektrische Feldstärke*  $E$  nennen. Zu ihrer operativen Definition betrachten wir einen Testkörper, der genau eine Ladungseinheit trägt und möglichst geringe Ausdehnung hat. Beim Verschieben des Testkörpers längs eines Weges  $\gamma$  ist gegen das elektrische Kraftfeld Arbeit zu leisten. Diese Arbeit setzt sich aus vielen infinitesimalen Arbeiten zusammen, die sich beim Durchlaufen von  $\gamma$  addieren, d.h. *es wird längs  $\gamma$  integriert*. Die Größe, die integriert wird, ist abgesehen vom Vorzeichen die elektrische Feldstärke  $E$ . Offenbar ist sie ihrem mathematischen Charakter nach eine (gerade) Differentialform ersten Grades. Wenn wir die bei Verschiebung längs  $\gamma$  (pro Ladungseinheit) aufzubringende Arbeit – sie ist gleich minus der freiwerdenden Energie – mit  $W_e(\gamma)$  bezeichnen (Abb. 1.5), haben wir die definierende Gleichung

$$\int_{\gamma} E = -W_e(\gamma).$$

Durch Übergang zu einem infinitesimalen Weg folgt, daß auf eine ruhende Punktladung  $q$  am Ort  $p$  die elektrische Kraft

$$K_p^{(e)} = qE_p$$

wirkt. Diese Kraft heißt auch die *Coulomb-Kraft*.



**Abbildung 1.5.** Per Definition ist die beim Verschieben einer Einheitsladung längs  $\gamma$  freierwerdende Energie gleich dem Wegintegral  $\int_{\gamma} E$  der elektrischen Feldstärke  $E$ .

Wir betonen, daß das Integral  $\int_{\gamma} E$  im allgemeinen Fall nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt von  $\gamma$  abhängt, sondern von  $\gamma$  insgesamt; oder differentiell ausgedrückt:  $dE \neq 0$ . Insbesondere ist  $\int_{\gamma} E$  für einen geschlossenen Weg  $\gamma = \partial S$  im allgemeinen von Null verschieden.  $\int_{\gamma} E$  heißt die *elektrische Spannung* längs  $\gamma$ . (Für einen geschlossenen Weg  $\gamma$  nennen wir  $\int_{\gamma} E$  die *elektrische Ringspannung* längs  $\gamma$ .) Die definierende Gleichung für die elektrische Feldstärke bedeutet, daß sich ihre physikalische Dimension  $[E]$  wie folgt konstituiert:

$$[E] = \text{Energie/Ladung} .$$

Im Unterschied hierzu tragen die Komponenten der elektrischen Feldstärke  $E = \sum E_i dx^i$  die Dimension Energie/(Ladung  $\times$  Länge) = Kraft/Ladung.

*Die magnetische Feldstärke.* Die Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke auf eine Testladung ist von deren Bewegungszustand unabhängig. Für sich allein genommen reicht sie nicht aus, um – in Verbindung mit dem Newtonschen Bewegungsgesetz – die Bewegung geladener Körper zu erklären. Zum Beispiel erfährt ein stromtragender Leiter in der Nähe eines Stabmagneten eine Kraft, die von seinem Ladungszustand unabhängig ist aber mit seinem Strom, d.h. mit der Dichte und Geschwindigkeit seiner frei beweglichen Ladungsträger, linear zunimmt. Dieses Phänomen, wie viele andere Beobachtungen auch, weist auf die Existenz einer geschwindigkeitsabhängigen Kraft, der sogenannten *Lorentz-Kraft*, hin. Die lokale Ursache der Lorentz-Kraft ist eine Größe, die wir die *magnetische Feldstärke*  $B$  nennen. Wie  $E$  definieren wir auch  $B$  in metrikfreier und invarianter Weise über den Arbeitsbegriff. Es sei dazu ein Teststrom in Form eines elektrisch neutralen aber stromtragenden Leiterstücks mit möglichst kleinem Querschnitt gegeben. Der Teststrom betrage genau eine Stromeinheit. Wir fixieren den Leiter an zwei Punkten  $a$  und  $b$  und bezeichnen mit  $\gamma$  den Weg des dazwischenliegenden Leiterstücks (Abb. 1.6). Nun verändern wir den Verlauf des Zwischenstücks von  $\gamma$  nach  $\gamma'$ . Dabei überstreicht das Leiterstück eine orientierte Fläche  $S_1$ , die durch  $\partial S_1 = \gamma' - \gamma$  berandet ist. Das Verschieben des Leiters erfordert die Arbeit  $W_m(S_1)$ . Was wir soeben beschrieben haben, ist eine Prozedur, die jeder

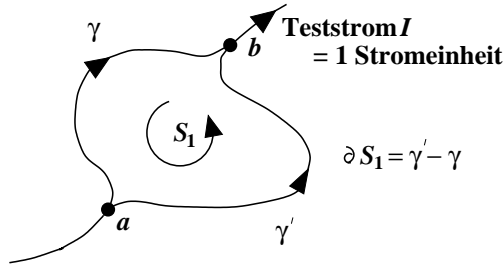


Abbildung 1.6. Zur operativen Definition der magnetischen Feldstärke

orientierten Fläche  $S$  eine reelle Zahl, nämlich gerade die entsprechende Arbeit  $W_m(S)$ , zuordnet. Die Funktion  $S \mapsto W_m(S)$  ist linear und deshalb als Flächenintegral einer (geraden) Differentialform zweiten Grades darstellbar. Diese 2-Form identifizieren wir als minus die magnetische Feldstärke  $B$ . Die Definition von  $B$  wird also durch die folgende Formel ausgedrückt:

$$\int_S B = -W_m(S) .$$

Offenbar hat  $B$  die physikalische Dimension

$$[B] = \text{Energie/Strom} = \text{Wirkung/Ladung} .$$

Das Flächenintegral  $\int_S B$  heißt auch der *magnetische Fluß* durch  $S$ . Wenn wir den Charakter von  $B$  als 2-Form besonders hervorheben wollen, nennen wir  $B$  alternativ die *magnetische Flußdichte*.  $B$  hat die Koordinatendarstellung  $B = \sum_{i < j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j$ . Die Komponenten von  $B$  tragen die physikalische Dimension  $[B_{ij}] = \text{Wirkung}/(\text{Ladung} \times \text{Fläche})$ .

Um aus der über den Arbeitsbegriff formulierten Definition der magnetischen Feldstärke einen expliziten Ausdruck für die Lorentz-Kraft zu gewinnen, betrachten wir eine idealisierte Situation, wie sie in Abb. ?? gezeigt ist. Dort wird ein kurzes gerades Leiterstück, das anfangs zwischen den Punkten  $p$  und  $p'$  verläuft, bei konstantem Strom  $I$  in die Endkonfiguration zwischen  $p_1$  und  $p'_1$  parallel verschoben. Ist  $\epsilon u$  der Vektor des Leiterstücks und  $\epsilon u_1$  der Verschiebungsvektor, so wird per Definition von  $B$  die Energie (für kleines  $\epsilon$ )

$$I \int_S B = I B_p(\epsilon u_1, \epsilon u) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

frei. Hieraus lesen wir ab, daß auf das Leiterstück unabhängig vom Verschiebungsvektor  $\epsilon u_1$  die Kraft  $B_p(\bullet, I \epsilon u)$  wirkt. Nun stellen wir uns vor, daß der Strom  $I$  durch das Geradenstück  $p + su$  ( $0 \leq s \leq \epsilon$ ) von einer einzelnen Ladung  $q$  mit Geschwindigkeit  $v$  verursacht wird und setzen  $I \epsilon u = qv$  (es kommt hier nur auf das Produkt  $qv$  – eben den Strom – an). Die Lorentz-Kraft auf diese Ladung ist dann gleich <sup>7</sup>

<sup>7</sup> In dem unter Theoretikern beliebten Gaußschen Maßsystem steht in der Formel für die Lorentz-Kraft ein Faktor der inversen Lichtgeschwindigkeit. Ein solcher

$$K^{(m)} = B_p(\bullet, qv) = -\iota(qv)B_p.$$

Wir fassen zusammen: auf eine Punktladung  $q$  mit Geschwindigkeit  $v$  wirkt am Ort  $p$  die elektromagnetische Kraft

$$\text{Axiom 2 : } \boxed{K_p = q(E_p - \iota(v)B_p)} \quad (\text{Kraft auf Punktladung}).$$

Wie aus den Meßvorschriften per Wegintegration bzw. Flächenintegration zwingend folgt, müssen die in dieses Kraftgesetz eingehenden Feldstärken  $E$  und  $B$  Differentialformen vom *geraden* Typ sein.

*Aufgabe 1.4.1.* Empirisch findet man, daß die magnetische Arbeit  $W_m(S) = -\int_S B$  nur vom Rand  $\partial S = \gamma' - \gamma$  der Fläche  $S$ , nicht aber von der Fläche selbst, abhängt. Antizipieren Sie aus dieser Beobachtung die Quellenfreiheit der magnetischen Feldstärke ( $dB = 0$ ).

### 1.5 Axiom 3: Induktionsgesetz (Erhaltung des magnetischen Flusses)

Per Konstruktion der Erregungen  $D$  und  $H$  in Abschn. 1.4 haben wir bereits die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$dD = \rho \quad \text{und} \quad dH = j + \dot{D}.$$

Ihnen zur Seite stellen wir jetzt ein Gesetz, das die Feldstärken  $E$  und  $B$  miteinander verknüpft. Es sei dazu  $S$  ein beliebiges orientiertes Flächenstück mit Rand  $\partial S$ . Per Postulat verlangen wir das Verschwinden der Summe aus der Zeitableitung des magnetischen Flusses durch  $S$  und der elektrischen Ringspannung längs  $\partial S$ :

$$\text{Axiom 3 : } \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_S B + \int_{\partial S} E = 0} \quad (\text{Induktionsgesetz}).$$

Wir sagen auch, daß ein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluß eine elektrische Ringspannung *induziert*. Das relative Vorzeichen merkt man sich über die *Lenzsche Regel*. Sie besagt folgendes. Der magnetische Fluß durch die orientierte Fläche  $S$  nehme z.B. mit der Zeit ab, d.h.  $\int_S \dot{B}$  sei negativ. Dann ist die induzierte Ringspannung  $\int_{\partial S} E$  positiv. Verläuft nun längs  $\partial S$  eine Leiterschleife, so bewirkt die induzierte Ringspannung einen Strom, welcher dem Durchlaufsinne von  $\partial S$  folgt. Wie wir später sehen werden, erzeugt ein solcher Strom nach dem Gesetz  $dH = j + \dot{D}$  in Verbindung mit einer  $H$  und  $B$  verknüpfenden Relation seinerseits einen positiven magnetischen Fluß durch  $S$ . *Der induzierte Strom wirkt also seiner Ursache entgegen* (Lenzsche

---

Faktor ist hier fehl am Platz. Wie die Herleitung über den Arbeitsbegriff deutlich herausstellt, ist die Lorentz-Kraft invariant definiert und hat keinerlei Kenntnis von der metrischen Information, die in der Lichtgeschwindigkeit steckt.

Regel). Historisch war es so, daß das postulierte Gesetz durch die experimentellen Beobachtungen von Faraday (1831) entdeckt wurde. Es heißt deshalb ausführlich das *Faradaysche Induktionsgesetz*.

Das Induktionsgesetz in differentieller Form lautet

$$\dot{B} + dE = 0 .$$

Wie nach mehrfacher Ausführung derselben Manipulationen inzwischen klar sein sollte, wird es aus dem Gesetz in integraler Form gewonnen, indem man das Kurvenintegral  $\int_{\partial S} E$  mit dem Stokesschen Satz in das Flächenintegral  $\int_S dE$  umwandelt und dann die Beliebigkeit der Fläche  $S$  ausnutzt. Das differentielle Gesetz hat in Koordinatendarstellung die Gestalt

$$\dot{B}_{12} + \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} = 0 ,$$

mit zwei weiteren Gleichungen, die wieder durch zyklisches Vertauschen der Indexmenge  $\{1, 2, 3\}$  entstehen.

*Die magnetische Feldstärke ist quellenfrei.* Wir zeigen nun, daß aus dem Induktionsgesetz in Verbindung mit der Aussage des Relativitätsprinzips – nämlich, daß die Naturgesetze in allen Inertialsystemen dieselbe Form haben – die Gleichung  $dB = 0$  folgt. Dazu wenden wir auf das Induktionsgesetz in differentieller Form die Cartan-Ableitung an und erhalten  $d\dot{B} = -d(dE) = 0$ . Folglich gilt  $dB = \rho_m$  mit  $\rho_m$  einer *zeitunabhängigen* 3-Form. Per Analogie zur Gleichung  $dD = \rho$  ließe sich  $\rho_m$  als *magnetische Ladungsdichte* auffassen. Im Unterschied zu den elektrischen Ladungen wären aber die magnetischen Ladungen, wenn sie existierten, wegen  $\rho_m = \text{const}$  (unabhängig von  $t$ ) *fest mit dem Raum verankert*. Es wäre deshalb ein spezielles Bezugssystem ausgezeichnet, nämlich jenes, bezüglich dessen die magnetischen Ladungen in Ruhe sind. Da dies im Widerspruch zum Relativitätsprinzip stünde, folgt das Gesetz

$$dB = 0 .$$

In Koordinatendarstellung schreibt es sich

$$\frac{\partial B_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial B_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^3} = 0 .$$

Seine integrale Form

$$\int_{\partial V} B = 0$$

besagt, daß der magnetische Fluß durch jede geschlossene Fläche  $\partial V$  verschwindet, d.h. die magnetische Flußdichte ist quellenfrei. Die Gleichungen  $\dot{B} + dE = 0$  und  $dB = 0$  heißen die *homogenen Maxwell-Gleichungen* in differentieller Form.

## 1.6 Flußlinienbild

Bevor wir den axiomatischen Aufbau der Elektrodynamik mit der Aufstellung der Materialgesetze abschließen, wollen wir innehalten und das Formulierte der intuitiven Anschauung besser zugänglich machen. Erfreulicherweise zeichnet sich der äußere Kalkül durch den besonderen Vorzug aus, daß er den Feldgrößen und Gesetzen der Elektrodynamik eine bildliche Vorstellung mitliefert, mit der sich die physikalische Realität gleichermaßen anschaulich wie akkurat beschreiben läßt. (Ähnliches kann der traditionelle Vektorkalkül nicht von sich behaupten; siehe z.B. Feynmans Diskussion der Unzulänglichkeiten des Feldlinienbildes.)

Der Schlüssel zur anschaulichen Darstellung im  $E_3$  ist die Übersetzung von  $(3-k)$ -Formen in  $k$ -Ketten, d.h. in Linearkombinationen von Flächenstücken der Dimension  $k$ . (In einem  $d$ -dimensionalen Raum wäre hier die Zahl 3 durch  $d$  zu ersetzen.) Die Motivation für eine solche Übersetzung liegt auf der Hand:  $k$ -dimensionalen Flächenstücke, nämlich Punkte, Linien, Flächen und Gebiete ( $k = 0, 1, 2, 3$ ), lassen sich leichter visualisieren als Differentialformen. Die Grundlage für die Übersetzung schuf der französische Mathematiker de Rham mit dem von ihm entwickelten Begriff der  $k$ -Ströme, der  $k$ -Formen und  $(3-k)$ -Ketten in einer einzigen großen Klasse von Objekten (nämlich Differentialformen mit distributionswertigen Koeffizienten) zusammengefaßt.

Es geht also darum, aus einer  $k$ -Form  $\omega$  im  $E_3$  eine  $(3-k)$ -Kette  $c$  zu machen. Zu diesem Zweck vergleichen wir für eine beliebige „Testdifferentialform“  $\alpha$  das Volumenintegral  $\int_{E_3} \omega \wedge \alpha$  mit einer Linearkombination von  $(3-k)$ -dimensionalen Integralen  $\sum m_i \int_{c_i} \alpha = \int_{\sum m_i c_i} \alpha$ . Beide Ausdrücke sind invariant definierte lineare Funktionale (oder Distributionen) auf dem Raum der Testformen. Diese Koinzidenz suggeriert die Idee, eine Übertragung  $\omega \rightarrow c = \sum m_i c_i$  durch folgende „Übersetzungsformel“ (siehe Abschn. 0.19) zu versuchen:

$$\int_{E_3} \omega \wedge \alpha \stackrel{!}{=} \int_c \alpha .$$

Das Ausrufezeichen soll zum Ausdruck bringen, daß Gleichheit nur durch einen entweder auf der linken oder auf der rechten Seite durchzuführenden Grenzübergang erreicht werden kann. Hier sind zwei konträre Sichtweisen möglich und nützlich. Zum einen können wir wie oben die kontinuierliche Differentialform  $\omega$  auf der linken Seite als fundamental ansehen und sie mittels der Übersetzungsformel durch eine geeignete Kette  $c$  annähern („Approximation des Kontinuierlichen durch das Diskrete“). Der gesunde Menschenverstand sagt uns, daß wir unter der Voraussetzung hinreichender Glattheit der Testform  $\alpha$  die Approximation beliebig genau machen können, indem wir die Kette  $c$  genügend fein wählen. (Ist  $\omega$  eine 3-Form, zum Beispiel, verbessern wir die Güte der Approximation dadurch, daß wir einen Punkt der 0-Kette  $c$  mit „Masse“  $m_i$  durch einen Schwarm von 100 Punkten mit Masse  $m_i/100$  ersetzen usw.) Der andere mögliche Standpunkt ist, die vorgegebene



Größe in der diskreten Kette auf der rechten Seite zu sehen und aus ihr durch „Verschmieren“ eine glatte Differentialform zu machen („Approximation des Diskreten durch das Kontinuierliche“).

Die zweite Sichtweise wurde bereits in Abschn. 1.2 implizit verwendet, als wir die elektrische Ladungsdichte einführten. Das fundamentale Modell der Ladungsdichte war ja ein System von Ladungen  $q_i$  an Punkten  $p_i$ , also eine 0-Kette  $c = \sum q_i p_i$ . Die zugehörige kontinuierliche Ladungsdichte  $\rho$  bestimmte sich durch die Forderung

$$\int_{E_3} \rho f \stackrel{!}{=} \sum q_i f(p_i)$$

für beliebige Testfunktion  $f$ . Berücksichtigen wir die Schreibkonvention  $\sum q_i f(p_i) = \int_c f$ , so hat diese Forderung genau die Form der obigen Übersetzungsformel. Gleichheit wird erzielt, indem man den Träger der kontinuierlichen Differentialform  $\rho$  durch einen Grenzprozeß auf die Punkte  $p_i$  konzentriert.

Die alternative Sichtweise („Approximation des Kontinuierlichen durch das Diskrete“) wollen wir am Beispiel der elektrischen Ladungsdichte  $j$  illustrieren. Dazu betrachten wir ein System geschlossener Stromkreise  $i$ , die stationäre Ströme  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) tragen. Sind die stromtragenden Kabel dünn genug (oder die Test-1-Form  $A$  hinreichend glatt), dann gilt in guter Näherung

$$\int_{E_3} j \wedge A = \sum I_i \int_{\gamma_i} A .$$

wobei die geschlossenen Integrationswege  $\gamma_i$  den Verlauf der Ströme wiedergeben. Mit  $c[j] := \sum I_i \gamma_i$  wird die rechte Seite zu  $\int_{c[j]} A$ , und die Gleichung nimmt wieder die Gestalt der obigen Übersetzungsformel an. In diesem Fall übersetzen wir also die kontinuierliche Stromdichte  $j$  näherungsweise in die diskrete 1-Kette  $c[j] := \sum I_i \gamma_i$ .

Man beachte, daß die Übersetzungsformel nicht nur koordinatenfrei formuliert ist, sondern auch ohne jede metrische Struktur (Skalarprodukt oder ähnliches) auskommt. Zudem liegt Invarianz unter orientierungstreuen Diffeomorphismen  $\psi$  des  $E_3$  vor, wenn wir die Transformationsgesetze  $\alpha \mapsto \psi^* \alpha$ ,  $\omega \mapsto \psi^* \omega$  und  $c \mapsto \psi^{-1} c$  vereinbaren. Wir unterstreichen diese Invarianzeigenschaften, weil sie für die logische Konsistenz unserer Darstellung unentbehrlich sind. Daß auf der linken Seite der Übersetzungsformel der  $E_3$  mit seiner Orientierung eingeht, hat eine interessante Konsequenz, die wir gleich noch beleuchten werden.

Im folgenden wollen wir die Übersetzungsformel dazu benützen, uns ein anschauliches Bild von der magnetischen Feldstärke  $B$  zu verschaffen. Da die Differentialform  $B$  den Grad  $k = 2$  hat, übersetzt sie sich im  $E_3$  in eine Kette der Dimension  $3 - 2 = 1$ . Wir bezeichnen die 1-Kette von  $B$  mit  $c[B]$ . Eine eben schon angedeutete Feinheit ist, daß die linke Seite der Übersetzungsregel unter orientierungsändernden Diffeomorphismen des  $E_3$  (z.B. Raumpiegelungen) das Vorzeichen wechselt, während das Linienintegral auf

der rechten Seite von der Orientierung des einbettenden Raumes gar nicht abhängt und deshalb ungeändert bleibt. Um diese Diskrepanz im Transformationsverhalten zu beheben, versehen wir die 1-Kette  $c[B]$  mit der äußeren Orientierung durch einen *Umlaufsinn* (anstelle der gewöhnlichen inneren Orientierung durch einen Richtungssinn). Vor der Berechnung von  $\int_B \alpha$  gemäß der Integrationsregeln für Differentialformen ist dann die äußere Orientierung von  $c[B]$  in eine innere Orientierung umzuwandeln. Da hierbei die Rechte-Hand-Regel (oder die Linke-Hand-Regel) im  $E_3$  eingeht, ist hiermit für die mathematische Konsistenz der Übersetzungsregel gesorgt. Anders verhält es sich für *ungerade* 2-Formen wie die Stromdichte  $j$  oder die elektrische Erregung  $D$ : hier hängt das Integral auf der linken Seite der Übersetzungsregel von der Orientierung des  $E_3$  *nicht* ab, und das korrekte Pendant auf der rechten Seite ist eine 1-Kette mit einer inneren Orientierung, d.h. einem Richtungssinn (siehe Abb. 1.3 und 1.1b).

#### Abbildungen hier einfügen

Die 2-Form der magnetischen Feldstärke  $B$  wird also durch eine 1-Kette  $c[B]$  mit Umlaufsinn approximiert. Wir nennen die Elemente der 1-Kette *magnetische Flußlinien*. Nun kommt es unserer Darstellung sehr entgegen, daß die Natur spezielle physikalische Systeme kennt, wo die magnetischen Flußlinien nicht nur ein peripheres Dasein als mathematisch-anschauliche Hilfskonstruktion fristen, sondern eine experimentell beobachtbare Realität annehmen! So dringt in der Shubnikov-Phase von Typ-II Supraleitern ein externes Magnetfeld in der Form von sogenannten „Vortizes“ oder magnetischen Flußschläuchen in den Supraleiter ein. Jeder Vortex trägt ein magnetisches Flußquant  $\Phi_0 = h/2e$  ( $h$  ist die Plancksche Konstante und  $e$  die Elektronladung). Die transversale Ausdehnung eines Vortex ist system- und temperaturabhängig und von der Größenordnung  $\lambda \gtrsim 10^{-7}$  m. [Für die quantenmechanische Erklärung des Phänomens der Supraleitung und der Flußquantisierung müssen wir auf die einschlägige Literatur der theoretischen Festkörperphysik verweisen. Kurz gesagt ist es für die Elektronen des Supraleiters energetisch optimal, in einen makroskopisch kohärenten und magnetfeldfreien Quantenzustand zu kondensieren. Wird einem Typ-II Supraleiter durch die experimentellen Randbedingungen ein magnetischer Fluß von außen aufgezwungen, dann motorisiert er (bis zu einem oberen kritischen Feld) Abschirmströme, die den magnetischen Fluß auf schlauchförmige Bereiche der transversalen Ausdehnung  $\lambda$  eingrenzen.] Für die Zwecke der makroskopischen Physik dürfen wir die endliche Dicke der Flußschläuche vernachlässigen und zu einem idealisierten Modell ausdehnungsloser *Flußlinien* übergehen.

Es versteht sich von selbst, daß das Bild quantisierter magnetischer Flußlinien im Vakuum oder in Medien ohne Supraleitung nur als Hilfskonstruktion (ohne nachweisbare physikalische Realität) unserer Anschauung nachhelfen soll. Es sei jedoch vorweggenommen, daß sich das Flußlinienbild (im Unterschied zum traditionellen Feldlinienbild des Vektorkalküls) als mathematisch konsistent und durchaus akkurat erweisen wird, und auch nicht im Wider-

spruch zur Beobachtung steht, wenn wir die Flußlinien nur feiner machen als das Experiment sie aufzulösen vermag.

Im Flußlinienbild (mit Flußquantisierung), das wir den folgenden Ausführungen zugrunde legen, reduziert sich die Berechnung des magnetischen Flusses durch eine Fläche  $S$  zu einer elementaren Zählaufgabe: wir zählen ganz einfach ab, wieviele Flußlinien die Fläche  $S$  kreuzen und multiplizieren mit dem Flußquant  $\Phi_0$ . Dabei zählen wir einen Kreuzungspunkt positiv oder negativ, je nachdem ob der Umlaufsinn der Flußlinie mit der Orientierung von  $S$  übereinstimmt oder nicht. Im Kontinuumslimit immer feiner werdender Flußlinien (mit entsprechend verkleinertem Flußquant) geht dieses Abzählverfahren unmittelbar in das Integral  $\int_S B$  über, das ja invariant und metrikfrei erklärt ist.<sup>8</sup>

Was bedeutet nun die Quellenfreiheit der magnetischen Feldstärke im Flußlinienbild? Dazu machen wir folgende formale Rechnung:

$$-\int_{E_3} f dB = \int_{E_3} B \wedge df = \int_{c[B]} df = \int_{\partial c[B]} f,$$

wobei neben der Übersetzungsregel  $B \rightarrow c[B]$  auch partielle Integration und der Satz von Stokes verwendet wurde. Insgesamt folgt  $c[dB] = -\partial c[B]$ . Das Gesetz  $dB = 0$  entspricht demnach  $\partial c[B] = 0$ , d.h. die 1-Kette  $c[B]$  hat keinen Rand oder, anders ausgedrückt, *magnetische Flußlinien sind stets geschlossen*. Für künftige Zwecke vermerken wir, daß eine analoge Rechnung für eine Differentialform  $\omega$  mit beliebigem Grad  $\deg(\omega)$  zu der Relation

$$c[d\omega] = (-1)^{\deg(\omega)+1} \partial c[\omega].$$

führt.

Als nächstes führen wir den in Abschn. 1.5 angekündigten Beweis der Äquivalenz des Induktionsgesetzes zu einem Erhaltungssatz für magnetische Flußlinien. Dazu zeigen wir zunächst, daß die Bewegung eines Systems magnetischer Flußlinien mit Geschwindigkeitsfeld  $v$  die elektrische Feldstärke  $E = \iota(v)B$  induziert. Das Argument ist wie folgt. In Abwesenheit eines elektrischen Feldes wirkt im (lokalen) Ruhesystem der Flußlinien auf einen geladenen Testkörper keine Kraft; insbesondere erleidet der Testkörper keine Beschleunigung. Daran darf sich nach dem Relativitätsprinzip nichts ändern, wenn wir in ein gleichförmig geradlinig bewegtes Bezugssystem übergehen, in dem die Flußlinien wie die Testladung sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Die Testladung  $q$  unterliegt jetzt der Lorentz-Kraft  $K = -\iota(qv)B$ . Damit keine Beschleunigung eintritt, muß eine elektrische Kraft  $-K$  wirken, die der Lorentz-Kraft genau die Waage hält. Dies erfordert aber die lokale Existenz einer elektrischen Feldstärke  $E = \iota(v)B$ , wie behauptet. (In der Sprache der

<sup>8</sup> Im Gegensatz hierzu benötigt der traditionelle Vektorkalkül zur Berechnung des magnetischen Flusses durch die Fläche  $S$  das Skalarprodukt des Vektorfeldes von  $B$  mit dem Normalenvektor von  $S$ . Hierdurch wird die metrische Struktur des Raumes eingeschleppt, was ganz und gar unnötig und der Problemstellung an sich völlig fremd ist.

Relativitätstheorie besagt die Flußlinien-Beziehung  $E = \iota(v)B$  nichts weiter, als daß  $E$  und  $B$  sich zu einem kovarianten Tensor zweiter Stufe, nämlich der Faraday-Form  $F = B + E \wedge dt$ , vereinigen.)

Wir kommen jetzt zum zentralen Thema des Abschnitts: der Begründung des Induktionsgesetzes im Flußlinienbild. Ausgangspunkt hierzu ist das Postulat der Erhaltung des magnetischen Flusses. Im aktuellen Kontext besagt dieses Postulat, daß magnetische Flußlinien nicht abrupt verschwinden oder aus dem Nichts auftauchen. Zwar dürfen sie sich auf jede erdenkliche Weise bewegen und ihre Form ändern – sie können auch auf einen Punkt zusammenschrumpfen und auf diese Weise annihilieren oder im inversen Prozeß aus einem Punkt durch Expansion kriecht werden – aber der postulierte Erhaltungssatz verlangt, daß all diese Vorgänge *kontinuierlich* ablaufen. Da wir auf dem Gesetz  $dB = 0$  (Nicht-Existenz magnetischer Monopole) insistieren, bleiben die magnetischen Flußlinien außerdem zu allen Zeiten geschlossen.

Seine mathematische Formulierung findet der postulierte Erhaltungssatz im Verschwinden der *totalen* Zeitableitung der magnetischen Feldstärke,  $dB/dt = 0$ . Bekanntlich (hier wird noch ein Verweis benötigt) ist die totale Zeitableitung gleich der partiellen Zeitableitung  $\dot{B}$  plus der durch das Strömen mit dem Geschwindigkeitsfeld  $v$  verursachten zeitlichen Änderung der Flußlinien. Da letztere durch die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_v = d\iota(v) + \iota(v)d$  von  $B$  ausgedrückt wird, schreibt sich der Erhaltungssatz in der Form

$$\frac{d}{dt}B = \dot{B} + \mathcal{L}_v B = 0.$$

(Es ist bequem, die Rechnung anhand der Differentialform  $B$  durchzuführen. Mit dem Rham's Formalismus von Stromformen läßt sie sich ohne weiteres auf die 1-Kette  $c[B]$  übertragen.) Nun vereinfacht sich aber mit  $dB = 0$  und  $E = \iota(v)B$  die Lie-Ableitung zu  $\mathcal{L}_v B = d\iota(v)B = dE$ , und es folgt das Induktionsgesetz

$$0 = \frac{d}{dt}B = \dot{B} + dE.$$

Das Induktionsgesetz läßt sich also als Kontinuitätsgleichung für magnetische Flußlinien verstehen.

ähnliches Argument trifft auch für die elektrische Erregung zu... ..

## 1.7 Axiom 4: Materialgesetze

Machen wir eine Bestandsaufnahme. Oben haben wir 12 unbekannte Funktionen :  $\text{Raum} \times \text{Zeit} \rightarrow \mathbb{R}$  eingeführt, nämlich die  $3+3+3+3$  Komponenten der Feldgrößen  $E$ ,  $B$ ,  $D$  und  $H$ . Dieser Zahl stehen bislang 8 skalare Gleichungen gegenüber. Es sind dies die  $1+3+3+1$  Komponenten der Gleichungen  $dD = \rho$ ,  $dH = j + \dot{D}$ ,  $-dE = \dot{B}$  und  $dB = 0$  in dieser Reihenfolge. Wir haben also mehr zu bestimmende Funktionen als Bestimmungsgleichungen.

Das Mißverhältnis ist sogar noch größer als es auf den ersten Blick scheint, denn die skalaren Gleichungen  $dD = \rho$  und  $dB = 0$  sind gar keine dynamischen Gleichungen sondern *Nebenbedingungen*. Erfüllen nämlich  $D$  und  $B$  diese Gleichungen zur Zeit  $t = 0$ , so tun sie das infolge der Gültigkeit der dynamischen Gleichungen  $dH = j + \dot{D}$  und  $-dE = \dot{B}$  für alle Zeiten.

*Aufgabe 1.7.1.* Verifiziere diese Aussage für die Gleichung  $dD = \rho$ .

Zur Bestimmung von 12 zeitabhängigen Funktionen stehen bislang 6 dynamische Gleichungen bereit. Es müssen daher zusätzliche Beziehungen zwischen den Feldern geknüpft werden, um das Gleichungssystem zu schließen. Dies geschieht durch die sogenannten *Materialgleichungen*, welche die elektrische Erregung und die elektrische Feldstärke einerseits, und die magnetische Erregung und die magnetische Feldstärke andererseits, zueinander in Beziehung setzen. Sie lauten:

$$D = \varepsilon_0 \star E \quad \text{und} \quad B = \mu_0 \star H .$$

Hierbei ist  $\star$  der Sternoperator ( $\star dx = dy \wedge dz$ ), und  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  sind zwei empirische Konstanten.  $\varepsilon_0$  heißt die *dielektrische Konstante des Vakuums* und  $\mu_0$  die *magnetische Permeabilität des Vakuums*. Die Materialgleichungen zeichnen sich durch die folgenden Eigenschaften aus. Sie sind *linear*, sie sind *lokal* (d.h. sie verknüpfen die elektromagnetischen Feldstärken am Ort  $p$  und zur Zeit  $t$  mit den elektromagnetischen Erregungen nur am selben Ort und zur selben Zeit), und sie sind wegen der Invarianz des Sternoperators unter Euklidischen Bewegungen *translations-* und *rotationsinvariant*. Man kann zeigen, daß diese Eigenschaften ihrerseits die Form der Materialgleichungen vollständig bestimmen.<sup>9</sup> Die Invarianz der Materialgleichungen unter Translationen und Rotationen drückt die Homogenität und Isotropie des Raumes aus.

Die Materialgleichungen sind mathematisch sinnvoll: in beiden Fällen wird durch  $\star$  eine Differentialform ersten Grades auf eine Differentialform zweiten Grades abgebildet. Da die Operation des Sternoperators die physikalische Dimension der 1-Form auf der rechten Seite jeweils um die einer Länge erhöht, gilt für die Dimensionen der Proportionalitätskonstanten

<sup>9</sup> Die Gültigkeit der Materialgleichungen in der angegebenen Form setzt voraus, daß in den inhomogenen Maxwell-Gleichungen durch  $\rho$  und  $j$  die *gesamte* Ladungsdichte und Stromdichte erfaßt wird. Zur phänomenologischen Beschreibung von Festkörpern und anderen Materieformen ist es jedoch zweckmäßig, nur einen ausgewählten *Teil* der Ladungsträger explizit zu behandeln und den Rest durch Umdefinition der Felder  $D$  und  $H$  aus dem Gleichungssystem zu eliminieren. Wie wir Abschn. 1.11 sehen werden, gehen dabei im allgemeinen Lokalität, Rotationsinvarianz, Translationsinvarianz und Linearität der Materialgleichungen verloren.

$$[\varepsilon_0] = \frac{[D]}{\text{Länge} \times [E]} = \frac{\text{Ladung}^2}{\text{Energie} \times \text{Länge}},$$

$$[\mu_0] = \frac{[B]}{\text{Länge} \times [H]} = \frac{\text{Energie} \times \text{Zeit}^2}{\text{Ladung}^2 \times \text{Länge}}.$$

Im SI-Maßsystem ist  $\mu_0$  per Definition der Stromeinheit Ampere auf den numerischen Wert  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Newton/(Ampere)<sup>2</sup> festgelegt. (Newton ist die Krafteinheit Kilogramm  $\times$  Meter/(Sekunde)<sup>2</sup>.) Zum numerischen Wert von  $\varepsilon_0$  werden wir gleich noch etwas sagen. In Koordinatendarstellung bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems haben wir

$$\begin{aligned} D_{12} &= \varepsilon_0 E_3, & D_{23} &= \varepsilon_0 E_1, & D_{31} &= \varepsilon_0 E_2, \\ B_{12} &= \mu_0 H_3, & B_{23} &= \mu_0 H_1, & B_{31} &= \mu_0 H_2. \end{aligned}$$

Die durch die Materialgleichungen geknüpften Verwandtschaften honorieren wir dadurch, daß wir  $E$  wie  $D$  pauschal das *elektrische Feld* nennen, und  $B$  wie  $H$  pauschal das *magnetische Feld*. Alle Größen  $E$ ,  $D$ ,  $B$  und  $H$  zusammen nennen wir das *elektromagnetische Feld*.

*Zusammenfassung.* An dieser Stelle tragen wir alle Gleichungen zusammen, denen die elektromagnetischen Felder genügen:

inhomogene Maxwell-Gln	Material-Gleichungen	homogene Maxwell-Gln
$dD = \rho$	$D = \varepsilon_0 \star E$	$dE = -\dot{B}$
$dH = j + \dot{D}$	$B = \mu_0 \star H$	$dB = 0$

Dies sind die Grundgleichungen der elektromagnetischen Theorie. Für vorgegebene Ladungen und Ströme bilden sie ein vollständig determiniertes System. Zum Beispiel kann man die 1-Formen  $E$  und  $H$  zugunsten der 2-Formen  $D$  und  $B$  eliminieren und erhält:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= -j + \mu_0^{-1} d \star B, \\ \dot{B} &= -\varepsilon_0^{-1} d \star D. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zusammen mit den Nebenbedingungen  $dD = \rho$  und  $dB = 0$  definieren ein eindeutig lösbares Anfangswertproblem, das wir im Kapitel über elektromagnetische Wellenausbreitung untersuchen werden.

*Aufgabe 1.7.2.* Dem elektromagnetischen Feld werden mittels  $\star$  und des kanonischen Isomorphismus  $I$  die Vektorfelder  $\mathbf{E} = I^{-1}E$ ,  $\mathbf{B} = I^{-1} \star B$ ,  $\mathbf{D} = I^{-1} \star D$  und  $\mathbf{H} = I^{-1}H$  zugeordnet. Außerdem sei  $\chi := \star\rho$  und  $\mathbf{j} := I^{-1} \star j$ . Zeige, daß die Gleichungen der elektromagnetischen Theorie unter diesen Zuordnungen mit den in Abschn. 0.10 definierten Differentialoperatoren  $\text{div}$  und  $\text{rot}$  die folgende Gestalt annehmen:  $\text{div} \mathbf{D} = \chi$ ,  $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ ,  $-\text{rot} \mathbf{E} = \partial \mathbf{B} / \partial t$ ,  $\text{div} \mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ .

*Metrische und differentielle Struktur.* In den Grundgleichungen der elektromagnetischen Theorie, so wie sie oben aufgeschrieben sind, sehen wir die differentielle Struktur des Raumes (und der Zeit) von seiner metrischen Struktur klar getrennt. Die homogenen und inhomogenen Maxwell-Gleichungen enthalten neben den Feldern und Strömen nur den Differentialoperator  $d$ . Da  $d$  metrikfrei erklärt ist, sind die Maxwell-Gleichungen nicht an die metrische Struktur von  $E_3$  gebunden. Dies hat die erfreuliche Konsequenz, daß sie beim Übergang zu einer gekrümmten Raum-Zeit, wie sie die Einsteinsche Gravitationstheorie erfordert, ihre Gültigkeit behalten. Im Gegensatz hierzu hängen die Materialgleichungen durch den Sternoperator sehr wohl von der metrischen Struktur des Raumes ab. (Wie wir in der zweiten Hälfte der Vorlesung sehen werden, bestimmen die empirischen Konstanten  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  eine Lorentzsche metrische Struktur auf der vierdimensionalen Raum-Zeit.) Bei der Einführung der Maxwell-Gleichungen via Definition der Felder bzw. per Postulat haben wir alle Gleichungen in differentieller Form jeweils auch in Koordinatendarstellung angegeben. Wir möchten hier besonders hervorheben, daß diese Gleichungen in *allen* Koordinatensystemen – krummlinige eingeschlossen – dieselbe Form haben. Hierfür sind die kartesischen Koordinaten  $x^1, x^2, x^3$  lediglich durch krummlinige Koordinaten  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  zu ersetzen. Für die Materialgleichungen in der angegebenen Koordinatendarstellung ist jedoch die Orthonormalität der Basis  $dx^1, dx^2, dx^3$  wesentlich. Sie ändern beim Übergang zu krummlinigen Koordinaten ihre Form.

*Paritätsinvarianz.* Gehen wir zurück und inspizieren wir die Formulierung aller Gesetze, dann fällt uns auf, daß wir nirgendwo die Orientierung des Raumes benutzen mußten... ..

*Magnetische Monopole.* Wir wollen den Faden noch etwas weiter spinnen und auf die Möglichkeit hinweisen, daß neben den elektrischen Ladungen auch magnetische Ladungen – als dynamische Größen – existieren könnten. Der Widerspruch zum Relativitätsprinzip entstand ja dadurch, daß das Induktionsgesetz in der angegebenen Form nur *statische* Ladungen (und somit gar keine) zuläßt. Wenn wir den magnetischen Ladungen eine *dynamische* Existenz zugestehen und das Induktionsgesetz um eine magnetische Stromdichte  $j_m$  erweitern, entsteht das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} dB &= \rho_m, & dD &= \rho_e, \\ -dE &= j_m + \dot{B}, & dH &= j_e + \dot{D}, \end{aligned}$$

wobei die Symbole  $\rho_e, j_e$  für  $\rho, j$  stehen. Dieses Gleichungssystem ist unter der Voraussetzung, daß das Gesetz der Ladungserhaltung auch für magnetische Ladungen gilt, mit allen bekannten Prinzipien der Physik verträglich (siehe dazu Kap. ??), und es zeichnet sich außerdem durch eine perfekte Symmetrie – von einem Vorzeichen abgesehen – zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern aus. Es ist aber bis heute nicht gelungen, die Existenz

magnetischer Ladungen experimentell nachzuweisen. Die Natur hat anscheinend von dieser theoretischen Möglichkeit keinen Gebrauch gemacht.<sup>10</sup>

*Lichtgeschwindigkeit.* Oben haben wir die physikalische Dimension der Naturkonstanten  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  angegeben. Die Kombination  $c := (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$  hat, wie man sieht, die physikalische Dimension einer Geschwindigkeit. Um die Bedeutung dieser Geschwindigkeit zu klären, machen wir eine kleine Rechnung. Im Vakuum, d.h. in Abwesenheit von Ladungen und Strömen, reduzieren sich die Feldgleichungen für  $D$  und  $B$  zu

$$dD = 0, \quad dB = 0, \quad \dot{D} = \mu_0^{-1}d \star B, \quad \dot{B} = -\varepsilon_0^{-1}d \star D.$$

Spezielle Lösungen hiervon sind leicht zu finden. Betrachte zum Beispiel für eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Ausdrücke

$$B = f(z - ct)dz \wedge dx \quad \text{und} \quad D = (\mu_0 c)^{-1}f(z - ct)dy \wedge dz.$$

Die angegebenen Flußdichten sind offensichtlich quellenfrei ( $dD = dB = 0$ ), und an den Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{B} &= -cf'(z - ct)dz \wedge dx = -\varepsilon_0^{-1}d \star D, \\ \dot{D} &= \mu_0^{-1}f'(z - ct)dz \wedge dy = \mu_0^{-1}d \star B \end{aligned}$$

erkennt man, daß auch die dynamischen Feldgleichungen für  $B$  und  $D$  erfüllt sind. Was ist nun die Bedeutung dieser Lösung der Gleichungen für das elektromagnetische Feld im ladungsfreien Raum? Sei dazu  $f$  eine "lokalisierte" Funktion (Abb. 1.7) mit Maximum bei Null. Die angegebene Lösung beschreibt dann eine planare, in  $z$ -Richtung räumlich lokalisierte *elektromagnetische Welle*, deren Kamm zur Zeit  $t$  auf der Ebene  $z = ct$  liegt. Die Welle bewegt sich (ohne Änderung ihres Profils) mit der Geschwindigkeit  $c$  fort.  $c$  ist also die *Lichtgeschwindigkeit*, d.h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum. Messungen haben für  $c$  den Wert  $c = 2.9979 \times 10^8$  Meter/Sekunde ergeben. Hierdurch ist jetzt auch die Konstante  $\varepsilon_0$  festgelegt. Sie hat den numerischen Wert  $\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 = 8.8544 \times 10^{-12}$  (Coulomb)<sup>2</sup>/(Joule  $\times$  Meter).

<sup>10</sup> Es sind theoretische Anstrengungen gemacht worden, Materie und Strahlung bei extrem hohen Energiedichten, wie sie z.B. für den Bruchteil einer Sekunde nach dem Urknall existierten, durch sogenannte „große vereinheitlichte Feldtheorien“ (engl. *grand unified theories*, kurz: GUTs) zu beschreiben. In diesen Feldtheorien werden magnetische Ladungen als topologisch nichttriviale Lösungen der Feldgleichungen auf ganz natürliche Weise und in reicher Anzahl produziert. Es ist für solche Feldtheorien daher problematisch, daß magnetische Ladungen bislang nicht beobachtet worden sind. GUTs werden durch die Nichtbeobachtung magnetischer Ladungen aber nicht ausgeschlossen, denn es lassen sich kosmologische Modelle konstruieren, die für eine hinreichend große „Ausdünnung“ der magnetischen Ladungen sorgen. Beachte auch die physikalische Dimension  $[\rho_m] = \text{Energie/Strom} = \text{Wirkung/Ladung}$ . Dirac hat schon 1932 gezeigt, daß magnetische Ladungen, wenn sie existieren, den Prinzipien der Quantentheorie zufolge nur als ganzzahlige Vielfache von  $h/e$  mit  $h$  dem Planckschen Wirkungsquantum und  $e$  der Elektronladung auftreten können.





$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E \wedge D + B \wedge H) = E \wedge \dot{D} + \dot{B} \wedge H = \\ E \wedge (dH - j) + (-dE) \wedge H = -d(E \wedge H) - E \wedge j,$$

wobei für das zweite Gleichheitszeichen die dynamischen Maxwell-Gleichungen  $\dot{D} = dH - j$  und  $\dot{B} = -dE$  benutzt wurden. Dieses Resultat nimmt mit den Definitionen  $u = (E \wedge D + B \wedge H)/2$  und  $s = E \wedge H$  die folgende Gestalt an:

$$\dot{u} + ds = -E \wedge j.$$

Die rechte Seite ist, wie wir schon wissen, nach Integration über  $V$  gleich der Rate der Energie, die vom elektromagnetischen Feld an die geladene Materie abgegeben wird. Die linke Seite hat – für verschwindende rechte Seite und mit den Identifikationen  $u \rightarrow \rho$ ,  $s \rightarrow j$  – die differentielle Form einer Kontinuitätsgleichung. Die Interpretation des Resultats liegt somit auf der Hand: die 3-Form

$$u = \frac{1}{2} (E \wedge D + B \wedge H)$$

ist die *Energiedichte* des elektromagnetischen Feldes, und die 2-Form

$$s = E \wedge H$$

ist seine *Energiestromdichte*.  $E \wedge H$  heißt traditionell “Poynting-Vektor”. Wir nennen diese Größe besser die *Poynting-2-Form*. Beachte, daß – im Unterschied zur  $N$ -Teilchen-Mechanik, wo die potentielle Energie des Systems dem Raum nicht lokal zugeordnet ist – Energie und Energiestrom des elektromagnetischen Feldes *lokalisierbar* sind: mit Kenntnis von  $u$  und  $s$  können wir quantifizieren, *wo* sich die Energie des elektromagnetischen Feldes befindet und *wohin* im Raum sie strömt.<sup>11</sup>

*Aufgabe 1.8.2.* Für die in Abschn. 1.7 (Lichtgeschwindigkeit) angegebene Lösung der Feldgleichungen gilt:  $E \wedge D = B \wedge H = u = \mu_0^{-1} f(z-ct)^2 dx \wedge dy \wedge dz$  und  $E \wedge H = c\mu_0^{-1} f(z-ct)^2 dx \wedge dy$ . Interpretiere dieses Ergebnis.

## 1.9 Anschlußbedingungen an Grenzflächen

*Motivation.* An der Grenzfläche zwischen zwei Medien können sich in singulärer Konzentration Ladungen ansammeln oder Ströme fließen. Prominente Beispiele hierfür sind Metall-Vakuum- oder Supraleiter-Vakuum-Grenzflächen. Die Ladungen und Ströme in der Grenzfläche werden in makroskopischer Näherung als ausdehnungslos in der zur Grenzfläche senkrechten Richtung angesehen. Es resultieren dann gewisse Anschlußbedingungen, die festlegen, wie sich die Tangentialkomponenten des elektromagnetischen Feldes über

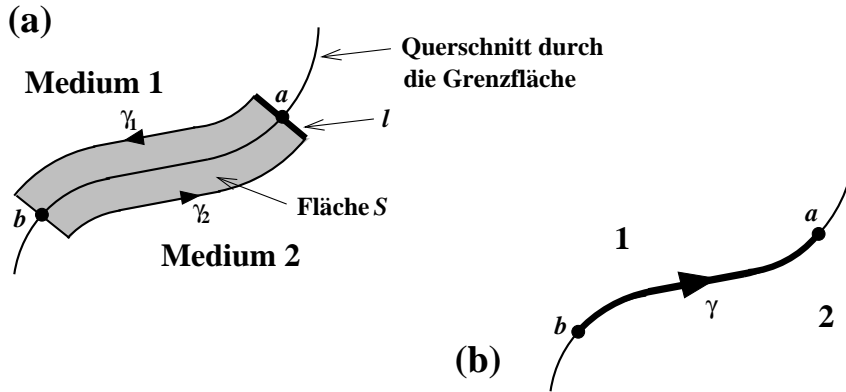
<sup>11</sup> Die hier angestellte Betrachtung legt  $u$  und  $s$  nicht eindeutig fest... in die angegebene Form geht eine zusätzliche Hypothese ein...

die Grenzfläche hinweg fortsetzen. Die Herleitung dieser Anschlußbedingungen ist eine einfache Anwendung der homogenen und inhomogenen Maxwell-Gleichungen in integraler Form. Als Nebenprodukt erhalten wir Meßvorschriften für  $D$  und  $H$ , welche die schon angegebenen Meßvorschriften für  $E$  und  $B$  komplettieren.

*Anschlußbedingungen für die Feldstärken.* Gegeben seien zwei Medien 1 und 2, die von einer Grenzfläche gegeneinander abgegrenzt werden. Das Induktionsgesetz  $-\int_{\partial S} E = \int_S \dot{B}$  erlaubt die Herleitung einer Anschlußbedingung für die elektrische Feldstärke  $E$  in der folgenden Weise. Wie in Abb. 1.8a gezeigt ist, schneiden wir die Grenzfläche mit einem zweidimensionalen Flächenstück  $S$ . Der Rand  $\partial S$  ist ein geschlossener Weg, der die Grenzfläche im Punkt  $a$  durchsticht, im Medium 1 parallel zur Grenzfläche (d.h. in konstantem Abstand von ihr) längs  $\gamma_1$  verläuft, die Grenzfläche im Punkt  $b$  erneut durchsticht und schließlich im Medium 2 parallel zu  $\gamma_1$  längs  $\gamma_2$  zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Die Kurvenstücke senkrecht zur Grenzfläche haben die Länge  $\ell$ . Wir schicken  $\ell$  gegen Null. Unter dieser Kontraktion konvergieren die Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  gegen  $-\gamma$  bzw.  $\gamma$  (Abb. 1.8b). Gleichzeitig verschwindet die Fläche von  $S$  und somit auch das Integral  $\int_S \dot{B}$ , denn die Zeitableitung der magnetischen Feldstärke  $B$  ist regulär. Es folgt

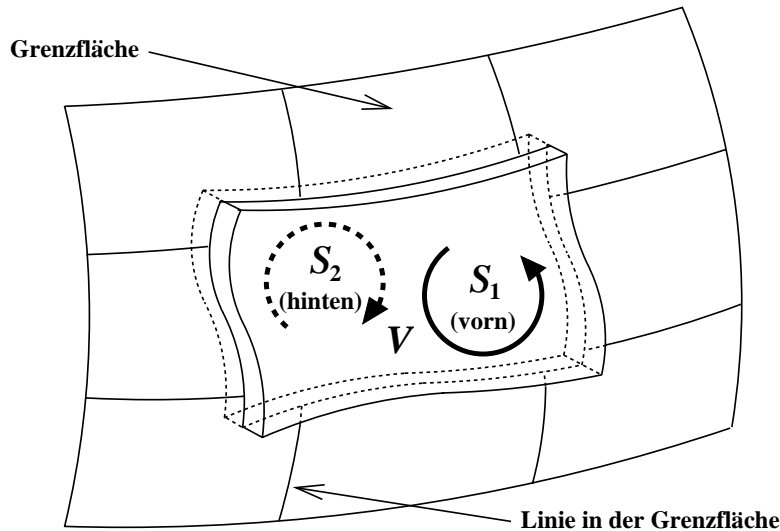
$$\int_{\gamma} (E^{(2)} - E^{(1)}) = 0,$$

wobei  $E^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) den Grenzwert bezeichnet, dem  $E$  bei Annäherung an die Grenzfläche vom Medium  $i$  her zustrebt. Aus der Beliebigkeit von  $\gamma$  schließen wir nun, daß sich die Tangentialkomponenten von  $E$  über die Grenzfläche hinweg stetig fortsetzen.



**Abbildung 1.8.** Skizze zur Herleitung der Anschlußbedingung für die elektrische Feldstärke an der Grenzfläche zweier Medien

Zur Herleitung einer Anschlußbedingung für  $B$  gehen wir von der Gleichung  $\int_{\partial V} B = 0$  aus und wählen das Gebiet  $V$  als einen deformierten Quader, welcher einen Teil der die Medien 1 und 2 gegeneinander abgrenzenden Trennfläche enthält (Abb. 1.9). Der Rand von  $V$  besteht aus zwei großen Seitenflächen  $S_1$  und  $S_2$ , die parallel zur Grenzfläche in den Medien 1 bzw. 2 liegen, und vier kleinen Seitenflächen senkrecht zur Grenzfläche. Die Orientierung des deformierten Quaders bestimmt eine Orientierung auf  $S_1$  und auf  $S_2$ . Wir lassen die Länge der Kanten senkrecht zur Grenzfläche wieder gegen Null gehen. Zu  $\int_{\partial V} B$  tragen dann nur die Flächenstücke  $S_1 \rightarrow -S$  und  $S_2 \rightarrow S$  bei. Bezeichnen wir den Grenzwert von  $B$  bei Annäherung von



**Abbildung 1.9.** Skizze zur Herleitung der Anschlußbedingung für die magnetische Feldstärke

Medium  $i$  an die Grenzfläche mit  $B^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), so erhalten wir

$$\int_S (B^{(2)} - B^{(1)}) = 0.$$

Da  $S$  ein beliebiger Teil der Grenzfläche ist, folgt die Stetigkeit der zur Grenzfläche *tangentialen* Komponente von  $B$ .

In traditionellen Lehrbüchern findet man an dieser Stelle immer die Aussage, es sei die *Normalkomponente* von  $B$ , die sich stetig verhielte. Dazu ist folgendes anzumerken. Die traditionelle Formulierung des Gesetzes von der Quellenfreiheit der magnetischen Flußdichte  $B$  besagt in Worten, daß die über eine geschlossene (aber ansonsten beliebige) Fläche integrierte Normalkomponente des Vektorfeldes  $\mathbf{B} = I^{-1} \star B$  verschwindet. Die sich hieraus ergebende Anschlußbedingung für  $\mathbf{B}$  ist "metrisch verseucht", setzt sie doch

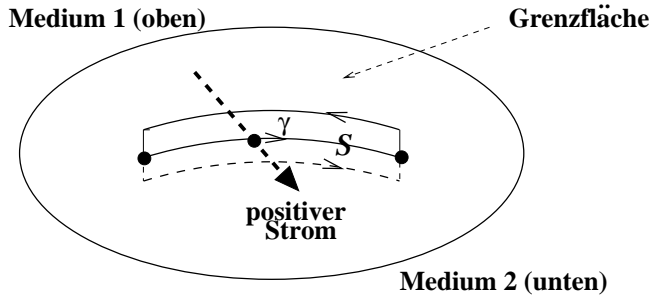
über den Begriff des Normalenvektors einer Fläche eine metrische Struktur voraus, die, wie unsere Herleitung zeigt, für diesen Zweck überhaupt nicht gebraucht wird! Wir vertreten den Standpunkt, daß physikalische Größen wie die magnetische Flußdichte  $B$ , deren Bestimmung es ist, über Flächen integriert zu werden, als Differentialformen zweiten Grades aufzufassen sind. Nach Abschn. 0.14 ist für ein orientiertes Flächenstück  $S$  das Integral  $\int_S B$  durch die zu  $S$  tangentielle Komponente von  $B$  vollständig bestimmt. Um mit der traditionellen Formulierung der Anschlußbedingung übereinzustimmen, müßten wir von unseren Konventionen abweichen und in Koordinatendarstellung  $B = B_{xy}dx \wedge dy + B_{yz}dy \wedge dz + B_{zx}dz \wedge dx$  z.B. die zur  $xy$ -Ebene tangentielle Komponente  $B_{xy}$  in "Normalkomponente" umbenennen. Eine solche Umbenennung wäre inkonsequent.

*Anschlußbedingungen für die Erregungen.* Das Verhalten der elektrischen Erregung  $D$  an Grenzflächen wird durch das Gesetz  $\int_{\partial V} D = \int_V \rho$  bestimmt. Wir betrachten nochmals Abb. 1.9 und führen denselben Grenzprozeß durch wie für die magnetische Feldstärke  $B$ . Falls eines der beiden Medien elektrisch leitet, ist jetzt die Möglichkeit zu berücksichtigen, daß sich an der Grenzfläche elektrische Ladungsträger in sehr hoher Dichte ansammeln. Typischerweise konzentrieren sich solche *Oberflächenladungen* in einer dünnen Schicht von etwa  $10^{-10}$  Metern Dicke. Für alle praktischen Zwecke der makroskopischen Physik ist es zulässig, eine so kleine Länge wie  $10^{-10}$ m durch Null zu ersetzen. Mit dieser Idealisierung bleibt das Integral  $\int_V \rho$  für  $\ell \rightarrow 0$  endlich. Wir definieren die *Flächenladungsdichte*  $\sigma$ , eine 2-Form, durch  $\int_V \rho \rightarrow \int_S \sigma$  für  $\ell \rightarrow 0$ . Mit denselben Schreibkonventionen wie vorher folgt die Gleichung  $\int_S (D^{(2)} - D^{(1)}) = \int_S \sigma$  oder, in differentieller Form

$$(D^{(2)} - D^{(1)})|_{\text{tang}} = \sigma,$$

d.h. die Tangentialkomponente von  $D$  verhält sich über die Grenzfläche hinweg *unstetig*, und die Diskontinuität ist gerade gleich der Flächenladungsdichte  $\sigma$ .

Um eine Anschlußbedingung für die magnetische Erregung  $H$  herzuleiten, gehen wir vom Ampère-Maxwell-Gesetz  $\int_{\partial S} H = \int_S (j + \dot{D})$  aus und stellen eine ähnliche Überlegung an wie für die elektrische Feldstärke  $E$ . Der Unterschied zu vorher besteht darin, daß wir zwar die Regularität von  $\dot{D}$  – wie zuvor von  $\dot{B}$  – voraussetzen, aber singuläres Verhalten der Stromdichte  $j$  in der Grenzfläche zulassen. Ein typisches Beispiel sind Vakuum-Supraleiter-Grenzflächen mit großen Oberflächenströmen in einer Schichtdicke von etwa  $\ell \sim 10^{-7}$  Metern, die für die Zwecke der makroskopischen Physik vernachlässigt werden kann. Wir charakterisieren die singuläre Stromdichte an der Grenzfläche durch die *Linienstromdichte*  $k$ , eine 1-Form, die folgendermaßen definiert ist. Betrachte einen in der Grenzfläche liegenden Weg  $\gamma$  und ein Flächenstück  $S$ , das die Grenzfläche längs  $\gamma$  schneidet (Abb. 1.10). Die Orientierung von  $S$  wird so gewählt, daß der Durchlaufsinne von  $\partial S$  im Medium 2 mit dem von  $\gamma$  übereinstimmt. Mit diesen Konventionen verlangen



**Abbildung 1.10.** Das Wegintegral der Linienstromdichte  $k$  längs  $\gamma$  ist gleich dem  $\gamma$  kreuzenden Strom. Die positive Stromrichtung wird durch den gestrichelten Pfeil angedeutet.

wir  $\int_S j \rightarrow \int_\gamma k$  für  $\ell \rightarrow 0$ , d.h. das Integral der Linienstromdichte längs  $\gamma$  ist gleich dem  $\gamma$  kreuzenden Strom. Aus der Definition von  $j$  über die Rechte-Hand-Regel (Abschn. 1.2) ergibt sich die in Abb. 1.10 durch den gestrichelten Pfeil angedeutete positive Stromrichtung. Ausführen des Grenzprozesses  $\ell \rightarrow 0$  im Ampère-Maxwell-Gesetz resultiert dann in der Anschlußbedingung  $\int_\gamma (H^{(2)} - H^{(1)}) = \int_\gamma k$ . Ihre differentielle Formulierung

$$(H^{(2)} - H^{(1)})|_{\text{tang}} = k$$

besagt, daß der tangentielle Teil von  $H$  beim Durchgang durch die Grenzfläche um die Linienstromdichte  $k$  springt.

*Aufgabe 1.9.1.* Es seien  $p$  ein Punkt in der stromführenden Grenzfläche und  $v$  ein Vektor, der am Punkt  $p$  tangential zur Grenzfläche liegt. Weiter sei  $u$  irgendein Vektor, der am Punkt  $p$  ins Medium 2 hineinzeigt. Begründe warum  $k_p(v)$  unabhängig von der genauen Wahl von  $u$  durch den Ausdruck

$$k_p(v) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} j_{p+su}(u, v) ds$$

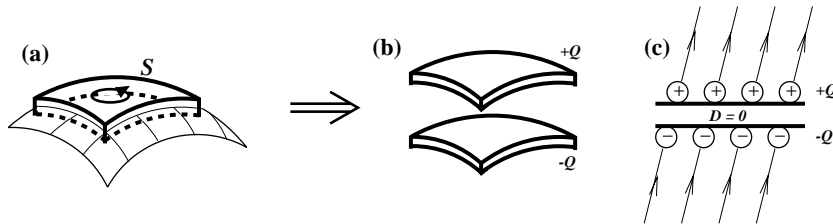
gegeben ist.

*Meßvorschrift für  $D$ .* Metallische Leiter werden durch die freie Beweglichkeit eines Teils ihrer Ladungsträger, der sogenannten *Leitungselektronen*, charakterisiert. Ein Leiter im Gleichgewicht ist in seinem Inneren notwendig elektrisch feldfrei, denn eine von Null verschiedene elektrische Feldstärke würde ja die frei beweglichen Ladungsträger beschleunigen und einen Strom bewirken. Die Feldfreiheit wird durch Oberflächenladungen erzielt, die sich auf der Leiteroberfläche justament so ansammeln, daß sie das Leiterinnere gegen ein äußeres elektrisches Feld abschirmen. Wegen  $D = \varepsilon_0 \star E$ <sup>12</sup> verschwindet mit

<sup>12</sup> Von der metrischen Struktur wird hier kein wesentlicher Gebrauch gemacht. Wir benutzen lediglich  $E = 0 \Leftrightarrow D = 0$ .

der elektrischen Feldstärke auch die elektrische Erregung  $D$  im Inneren eines Leiters im Gleichgewicht. Dieser Sachverhalt ermöglicht im Prinzip die Messung von  $D$  durch folgende Prozedur.

Unsere Aufgabe bestehe darin, für ein vorgegebenes (orientiertes) Flächenstück  $S$  den elektrischen Fluß  $\int_S D$  zu messen. Für diesen Zweck beschaffen wir uns eine Meßsonde, die aus zwei  $S$  nachgeformten, dünnen Metallplatten besteht. Vor Meßbeginn werden die beiden Platten in den elektrisch neutralen Zustand versetzt und aufeinandergelegt. Die Platten im vereinigten Zustand bringen wir mit dem Flächenstück  $S$  zur Deckung, um sie dann wieder zu separieren (vgl. Abb. 1.11). Die Platten sind jetzt elektrisch geladen. (Während



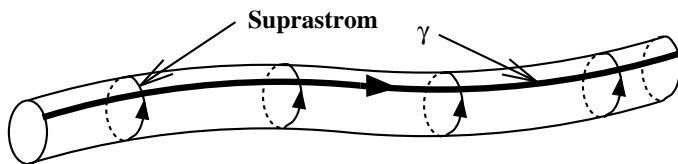
**Abbildung 1.11.** Zur Messung von  $D$ : Zwei Metallplatten werden mit der orientierten Fläche  $S$  zur Deckung gebracht (a) und dann separiert (b). In (c) ist die Abschirmung des elektrischen Flusses ( $D = 0$ ) durch die induzierte Flächenladungsdichte in einer Seitenansicht skizziert. Eine gute Abbildung (c) würde das Abknicken der elektrischen Flußlinien andeuten. Die elektrischen Flußlinien laufen ja immer senkrecht auf metallische Oberflächen zu. Außerdem benötigt die Fläche  $S$  eine äußere Orientierung.

des Kontakts rearrangierten sich die Leitungselektronen, um das Innere der vereinigten Metallplatten gegen die elektrische Feldstärke am Ort der Messung abzuschirmen.) Die Ladungen der beiden Platten sind dem Betrag nach gleich und im Vorzeichen verschieden. Durch das Flächenstück  $S$  wird beiden Platten eine Orientierung mitgegeben. Wir messen die Ladung derjenigen Platte, die von außen gesehen die mathematisch positive Orientierung (Gegenurzeigersinn) trägt. Aus der Anschlußbedingung, die  $D$  über eine geladene Platte hinweg fortsetzt, und aus dem Verschwinden von  $D$  zwischen den infinitesimal separierten Platten folgt, daß das Resultat der Messung gleich  $\int_S D$  ist. Soll die elektrische Erregung im Inneren eines Festkörpers gemessen werden, so müssen wir ein Loch bohren und die Meßsonde an die betreffende Stelle bringen. Falls Zeitabhängigkeit vorliegt, müssen wir schneller messen als das Feld  $D$  sich ändert.

*Aufgabe 1.9.2.* Die Meßvorschrift für  $D$  basiert auf dem Gaußschen Gesetz ( $dD = \rho$ ). Nun wird aber  $D$  durch  $dD = \rho$  nicht eindeutig festgelegt, denn mit  $D$  ist ja auch  $D + d\theta$  Lösung der Gleichung! Man könnte daher einwenden, daß eine bloße Ladungsmessung zur Bestimmung von  $D$  nicht ausreichen kann. Warum funktioniert die Meßvorschrift trotzdem?

*Meßvorschrift für  $H$ .* Supraleiter<sup>13</sup> haben die hochinteressante Eigenschaft, Magnetfelder unterhalb einer kritischen Stärke vollständig aus ihrem Inneren zu verdrängen. Man sagt, Supraleiter seien *perfekte Diamagneten*. Die Magnetfeldverdrängung wird dadurch erreicht, daß an der Oberfläche eines Supraleiters Ströme zirkulieren, deren Magnetfeld das externe Magnetfeld im Inneren des Supraleiters exakt kompensiert. Dieser Effekt gestattet im Prinzip die Messung von  $H$  durch eine Prozedur, die der oben beschriebenen Meßvorschrift für  $D$  analog ist. Sie basiert auf der Anschlußbedingung für die Tangentialkomponente von  $H$  und funktioniert folgendermaßen.

Wir stellen uns die Aufgabe, für einen beliebigen Weg  $\gamma$  die magnetische Spannung  $\int_{\gamma} H$  zu messen. Dazu verwenden wir einen schlauchförmigen Testkörper aus supraleitendem Material (Abb. 1.12). Der Schlauch sei in Form



**Abbildung 1.12.** Skizze zur Meßvorschrift für  $H$

und Länge dem Weg  $\gamma$  exakt nachgebildet, habe aber einen endlichen Querschnittsradius ( $\gg 10^{-7}\text{m}$ ) (Erinnerung daran, wie es zu dieser mikroskopischen Länge kommt). Wir bringen den supraleitenden Schlauch an den Meßort. Der Supraleiter setzt dann in Reaktion auf ein äußeres Magnetfeld Ströme in Bewegung, die an seiner Oberfläche fließen und die magnetische Flußdichte  $B$ , und damit auch die magnetische Erregung  $H$ , aus seinem Inneren völlig verdrängen. Auf der Oberfläche des Schlauches sei eine Meßapparatur angebracht (Gedankenexperiment), die es uns gestattet, den um den Schlauch zirkulierenden Oberflächenstrom zu messen. Wir messen den Oberflächenstrom durch den Weg  $\gamma$ . Das Resultat der Messung ist dann gleich der zu messenden Größe  $\int_{\gamma} H$ .

*Aufgabe 1.9.3.* Begründe warum für das korrekte Vorzeichen von  $\int_{\gamma} H$  die positive Stromrichtung so wie in Abb. 1.12 durch Pfeile angedeutet zu wählen ist.

<sup>13</sup> Supraleitung ist ein quantenmechanisches Vielteilchenphänomen, für dessen Erklärung wir auf die Lehrbücher der theoretischen Festkörperphysik verweisen müssen.



## 1.10 Elektrodynamik in Materie

*Motivation.* Die Gleichungen der elektromagnetischen Theorie zusammen mit dem Kraftgesetz für bewegte Ladungen geben im Prinzip eine vollständige Beschreibung elektromagnetischer Phänomene im Rahmen der klassischen Physik. Ihre Gültigkeit setzt jedoch voraus, daß in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen wirklich *alle* Ladungen und Ströme eingehen – die in Materie auf atomaren oder mikroskopischen Skalen existierenden eingeschlossen. Dieser Umstand nimmt der oben formulierten exakten Theorie ihre Vorhersagekraft, denn die atomaren Ladungsverteilungen und -bewegungen und ihre Reaktion auf elektromagnetische Felder sind im allgemeinen zu kompliziert, als daß wir hoffen könnten, sie im Detail zu erfassen. Zudem erfordert ihre korrekte Beschreibung den Formalismus der Quantenstatistik, der den Rahmen dieser Vorlesung bei weitem sprengt. Um das schwierige Problem der Berechnung atomarer Prozesse von unserem eigentlichen Ziel, nämlich der Vorhersage *makroskopischer* elektromagnetischer Phänomene, abzutrennen, führen wir Näherungen ein und formulieren eine *Maxwellsche Theorie in Materie*, welche die mikroskopischen Details auf einfache Weise berücksichtigt. Unser Vorgehen wird dabei so sein, daß wir im ersten Schritt ein exaktes Umschreiben der elektromagnetischen Theorie vornehmen. Im zweiten Schritt führen wir dann ein Raum- und Zeitmittel durch, das die in Materie rapiden Schwankungen der elektromagnetischen Felder auf mikroskopischen Skalen eliminiert, und ersetzen die Materialgleichungen durch phänomenologische Beziehungen.

Wir beginnen, indem wir eine Aufspaltung der Ladungen und Ströme in zwei Anteile vornehmen:

$$\rho = \rho^{\text{ext}} + \rho^{\text{mat}}, \quad \text{und} \quad j = j^{\text{ext}} + j^{\text{mat}}.$$

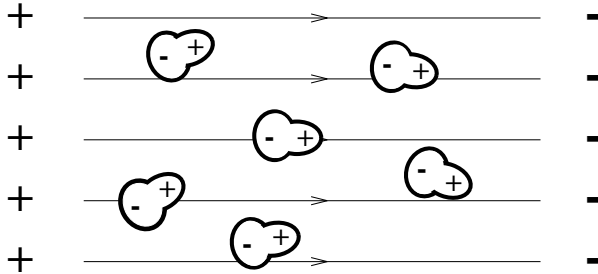
Den jeweils ersten Summanden nennen wir den externen Anteil, den zweiten den Materieanteil. Generell haben wir uns vorzustellen, daß sich die externen Ladungen und Ströme außerhalb der Materie befinden oder jedenfalls durch äußeren Zugriff manipuliert werden können. Im Unterschied hierzu ist der Materieanteil der sich jenseits unserer Kontrolle befindliche Anteil, welcher sich in Reaktion auf die Kraftwirkung elektromagnetischer Felder in Materie einstellt. Die Aufspaltung in zwei Anteile ist nicht immer eindeutig, sondern muß der jeweiligen Problemstellung angepaßt werden. Eine sinnvolle Aufspaltung erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}^{\text{ext}} + dj^{\text{ext}} = 0.$$

Es folgt dann mit  $\dot{\rho} + dj = 0$  auch die Kontinuitätsgleichung für Materieladungen und -ströme. Wir vereinbaren außerdem, überschüssige Ladungen immer als extern zu zählen, d.h.  $\rho^{\text{mat}}$  verschwinde nach Integration über den gesamten von Materie erfüllten Raumbereich.

*Elektrische Polarisierung.* In einem polarisierbaren Medium bewirkt die Anwesenheit elektrischer Felder eine Umorganisation der mikroskopischen Ladungen. Zwei Mechanismen sind zu nennen. Zum einen können durch die

Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke Ladungen, die sich sonst neutralisieren, gegeneinander verschoben werden, zum anderen richten sich permanent getrennte Ladungen, z.B. Moleküle mit einem statischen Dipolmoment, längs des elektrischen Feldes aus (Abb. 1.13). Die Umorganisation von Ladungen



**Abbildung 1.13.** Polare Moleküle (z.B. in einem Lösungsmittel) richten sich im elektrischen Feld aus.

wird durch die *elektrische Polarisierung*  $P$ , eine 2-Form, quantitativ erfaßt. Für eine beliebige orientierte Fläche  $S$  definieren wir  $\int_S P$  als die gesamte Materieladung, die infolge der Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke durch  $S$  “hindurchgeschoben” wurde. Dabei zählen wir die Materieladung relativ zu einem lokal neutralen Referenzzustand in der fernen Vergangenheit. Ist  $V$  ein dreidimensionales Gebiet mit Rand  $\partial V$ , so folgt:

$$\int_V \rho^{\text{mat}} = Q^{\text{mat}}(V) = - \int_{\partial V} P = - \int_V dP .$$

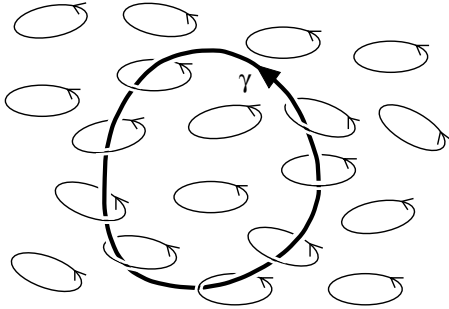
Das Minuszeichen erklärt sich aus der Tatsache, daß das Hinausfließen positiver Ladung durch  $\partial V$  eine entsprechende negative Ladung in  $V$  zurückläßt. Die Beliebigkeit von  $V$  resultiert in

$$\rho^{\text{mat}} = -dP.$$

Überdeckt  $V$  den gesamten materieerfüllten Raum, so ergibt sich wegen  $P = 0$  außerhalb der Materie die Gleichung  $Q^{\text{mat}}(V) = - \int_{\partial V} P = 0$ , d.h. die gesamte Materieladung verschwindet in Übereinstimmung mit der oben getroffenen Vereinbarung.

*Magnetisierung.* Das magnetische Analogon zu einem elektrisch polarisierbaren Medium ist ein Material, das sich unter dem Einfluß einer magnetischen Feldstärke  $B$  magnetisch ordnet. In der Atomphysik lernt man, daß der orbitale Drehimpuls und der Spin von Elektronen in ungesättigten Atomhüllen Ursache eines atomaren magnetischen Dipolmoments ist. In einem simplen klassischen Bild könnten wir uns vorstellen, daß die Elektronen der Atomhülle sich auf elliptischen Bahnen bewegen, was einem atomaren Kreisstrom, und somit einem magnetischen Dipolmoment (siehe Kap.2), entspricht. Diese

atomaren Kreisströme werden durch die Kraftwirkung der magnetischen Feldstärke polarisiert, d.h. sie richten sich im Feld partiell aus und addieren sich zu einem lokalen Gesamtstrom, dem sogenannten Magnetisierungsstrom. Zur quantitativen Beschreibung dieses Sachverhalts führen wir die *Magnetisierung*  $M$ , eine 1-Form, ein. Sie ist durch die Forderung definiert, daß das Linienintegral  $\int_{\gamma} M$  für eine beliebige Kurve  $\gamma$  dem um  $\gamma$  zirkulierenden Magnetisierungsstrom gleich sei (Abb. 1.14).



**Abbildung 1.14.** Das Linienintegral  $\int_{\gamma} M$  ist gleich dem um  $\gamma$  zirkulierenden Magnetisierungsstrom.

Zur Herleitung einer zu  $\rho^{\text{mat}} = -dP$  analogen Formel für  $j^{\text{mat}}$  betrachten wir eine orientierte Fläche  $S$  und berechnen den gesamten Materiestrom  $I^{\text{mat}}(S)$  durch  $S$ . Dabei ist zu berücksichtigen, daß zu  $I^{\text{mat}}(S)$  neben dem Magnetisierungsstrom auch der von der zeitlichen Änderung von  $P$  herrührende Polarisierungsstrom beiträgt. Es gilt daher

$$\int_S j^{\text{mat}} = I^{\text{mat}}(S) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S P + \int_{\partial S} M = \int_S (\dot{P} + dM),$$

woraus die folgende Gleichung resultiert:

$$j^{\text{mat}} = \dot{P} + dM.$$

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck zusammen mit jenem für  $\rho^{\text{mat}}$  die Kontinuitätsgleichung für die Materieladungen erfüllt. Wie  $P$  verschwindet auch  $M$  außerhalb der Materie.

*Mathematische Argumentation.* Vom didaktischen Gesichtspunkt leidet unsere Darstellung unter dem Mangel, daß sie ein gewisses Verständnis der Atomphysik sowie einiger Begriffe wie des elektrischen und magnetischen Dipolmoments, die im folgenden erst noch zu entwickeln sind, voraussetzt. Wir wollen deshalb als zusätzliche Information anbieten, daß die Gleichungen für die Ladungs- und Stromdichte in Materie auch mathematisch gut motiviert sind (das Argument ist völlig analog zur Einführung der elektromagnetischen Erregungen  $D$  und  $H$  in Abschn. 1.4), und zwar wie folgt. Als topdimensionale und deshalb geschlossene Form mit verschwindendem Raumintegral besitzt

$\rho^{\text{mat}}$  ein Potential:  $\rho^{\text{mat}} = -dP$ . Nach obiger Diskussion wird  $P$  als die Polarisierung identifiziert. Wie  $\rho^{\text{mat}}$  ist auch die 2-Form  $j^{\text{mat}} - \dot{P}$  geschlossen:  $d(j^{\text{mat}} - \dot{P}) = -\dot{\rho}^{\text{mat}} + \dot{\rho}^{\text{mat}} = 0$ . Folglich ist sie nach Poincaré auf jedem sternförmigen Materiegebiet exakt, und wir können  $j^{\text{mat}} - \dot{P} = dM$  setzen. Das Potential  $M$  läßt sich wie oben erläutert als die Magnetisierungs-1-Form auffassen.

*Maxwellsche Theorie in Materie.* Es sei betont, daß die Polarisierung  $P$  im allgemeinen nichtlokal von  $E$  abhängt. Anders ausgedrückt wird  $P_a(\dots, t)$  nicht nur durch  $E$  am Ort  $a$  zur Zeit  $t$  bestimmt, sondern auch durch die Werte von  $E$  zu früheren Zeiten  $t' < t$  und anderswo im Raum. Die Ursachen dieser Nichtlokalität sind die Trägheit und endliche Ausdehnung der Materieladungen.<sup>14</sup> Um die nichtlokale oder *funktionale* Abhängigkeit der Polarisierung von der elektrischen Feldstärke evident zu machen, schreiben wir auch  $P[E]$  für  $P$ . Ähnlich wie  $P[E]$  in nichtlokaler Weise von  $E$  abhängt, so ist auch  $M$  ein im allgemeinen nichtlokales Funktional der magnetischen Feldstärke  $B$ , und wir schreiben zur besonderen Betonung dieser Abhängigkeit  $M[B]$  für  $M$ .

Wir können jetzt die Materieladungen und -ströme zugunsten der Polarisierung  $P$  und der Magnetisierung  $M$  aus den Gleichungen der elektromagnetischen Theorie eliminieren. Dazu definieren wir die 2-Form  $\mathcal{D} = D + P$  und die 1-Form  $\mathcal{H} = H - M$ . Die Größen  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{H}$  sind Hilfsfelder ohne direkte physikalische Bedeutung. Sie genügen den modifizierten inhomogenen Maxwell-Gleichungen  $d\mathcal{D} = \rho - \rho^{\text{mat}} = \rho^{\text{ext}}$  und

$$d\mathcal{H} = j + \dot{D} - dM = j + \dot{\mathcal{D}} - j^{\text{mat}} = j^{\text{ext}} + \dot{\mathcal{D}},$$

in die nur noch der externe Anteil der Ladungen und Ströme eingeht. Außerdem treten an die Stelle der Materialgleichungen im Vakuum die Beziehungen

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \star E + P[E], \quad \text{und} \quad \mathcal{H} = \mu_0^{-1} \star B - M[B].$$

Diese Gleichungen drücken die Hilfsfelder  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{H}$  durch die elektromagnetischen Feldstärken  $E$  und  $B$  aus. Infolge der Eigenschaften der Funktionale  $P[E]$  und  $M[B]$  sind sie im allgemeinen zeitlich und räumlich nichtlokal, anisotrop (in Kristallen), inhomogen (in ungeordneten Medien) und nichtlinear (in Ferroelektrika und Ferromagneten). Zusammenfassend haben wir das folgende Gleichungssystem der Maxwellschen Theorie in Materie:

inhomogene Maxwell-Gln	Material-Gleichungen	homogene Maxwell-Gln
$d\mathcal{D} = \rho^{\text{ext}}$	$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \star E + P[E]$	$dE = -\dot{B}$
$d\mathcal{H} = j^{\text{ext}} + \dot{\mathcal{D}}$	$\mathcal{H} = \mu_0^{-1} \star B - M[B]$	$dB = 0$

<sup>14</sup> Die räumliche Nichtlokalität ist typisch von atomarer Dimension, während die Nichtlokalität in der Zeit durch atomare Schwingungsdauern bestimmt wird.

*Phänomenologie.* Die obige Reformulierung der Maxwellschen Theorie ist exakt und deshalb genauso schwierig zu behandeln wie die Theorie in ihrer ursprünglichen Form. An die Stelle der Berechnung von  $\rho^{\text{mat}}$  und  $j^{\text{mat}}$  tritt jetzt das äquivalente Problem der Berechnung von  $P[E]$  und  $M[B]$ . Die Nützlichkeit der Umformulierung besteht darin, daß sie sich gut für die Einführung von Näherungen eignet. Zu diesem Zweck führt man zunächst eine Mittelungsprozedur durch, um die rapiden zeitlichen und räumlichen Schwankungen auf atomaren Skalen zu eliminieren. (Wie eine solche Mittelung im Prinzip durchgeführt werden kann, ohne die Struktur der Maxwell-Gleichungen zu verletzen, ist Thema von Kap. 3.) Die Mittelung vereinfacht die komplizierten funktionalen Abhängigkeiten  $P[E]$  und  $M[B]$  und läßt uns die Materialgleichungen durch einfache "makroskopische" Beziehungen ersetzen.

*Homogenes Dielektrikum.* Im Fall eines homogenen Dielektrikums gilt per Definition des dielektrischen Tensors  $\varepsilon_{ij}^k = -\varepsilon_{ji}^k$

$$\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \left( \int \sum_k \varepsilon_{ij}^k(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - s) E_k(\mathbf{x}', s) d^3 \mathbf{x}' \right) ds .$$

Für ein isotropes Medium im statischen Limes reduziert sich  $\varepsilon_{ij}^k$  zu einer einzigen skalaren Größe  $\varepsilon$ , und wir erhalten die simple Materialgleichung

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \star E .$$

*Homogenes Magnetikum.* Im magnetischen Fall ist es Konvention, die Feldstärke durch die Erregung auszudrücken. Die Materialgleichungen in linearer Näherung lauten dann

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \int_0^\infty \left( \int \sum_k \mu_{ij}^k(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - s) \mathcal{H}_k(\mathbf{x}', s) d^3 \mathbf{x}' \right) ds .$$

$\mu_{ij}^k = -\mu_{ji}^k$  heißt der Tensor der magnetischen Permeabilität. Im isotropen und statischen Limes resultiert wieder ein sehr einfaches Gesetz:

$$B = \mu_0 \mu \star \mathcal{H} .$$

Für  $\mu > 1$  wird  $B$ , die totale magnetische Feldstärke in Materie, relativ zum äußeren Feld  $B^{\text{ext}} = \mu_0 \star \mathcal{H}$  verstärkt. Das magnetische Medium heißt in diesem Fall ein *Paramagnet*. Im umgekehrten Fall ( $0 < \mu < 1$ ) liegt ein *Diamagnet* vor. Supraleiter, die ein äußeres Magnetfeld vollständig verdrängen, sind perfekte Diamagneten ( $\mu = 0$ ).

*Ohmsches Gesetz.* Die Gleichungen der Elektrodynamik in Materie eignen sich besonders gut zur Beschreibung von Dielektrika und magnetischen Materialien. Anders ist die Situation in metallischen Leitern. Die vollständige Abschirmung äußerer Felder im Gleichgewicht entspricht einer divergenten dielektrischen Konstanten ( $\varepsilon = \infty$ ). In Metallen bewirkt die Anwesenheit eines elektrischen Feldes (im quasi-stationären oder dynamischen Fall) mehr als nur eine elektrische Polarisierung. Die Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke

beschleunigt die Leitungselektronen, und dissipative Prozesse, wie z.B. Kollisionen mit dem Atomgitter, bewirken dann eine Relaxation (über Zeitskalen der Größenordnung  $10^{-14}\text{s}$ ) zu einem stromführenden Zustand, der durch das *Ohmsche Gesetz*

$$j = \sigma \star E$$

bestimmt ist. Die Materialkonstante  $\sigma$  heißt die elektrische Leitfähigkeit. Sie hat die physikalische Dimension  $[\sigma] = \text{Strom}/(\text{Spannung} \times \text{Länge})$ . Zum Beispiel hat Kupfer bei  $T = 300\text{K}$  (Zimmertemperatur) die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma = 5.7 \times 10^7 (\text{Ohm} \times \text{Meter})^{-1}$ . Dabei ist 1 Ohm = 1 Volt/Ampere die Einheit des elektrischen Widerstandes im SI-Maßsystem.

## 1.11 Flußlinien

Dieser Abschnitt spielt eine zentrale Rolle in der Didaktik dieser Vorlesung. Hier wird der physikalische Inhalt der Gleichungen der Elektrodynamik mit Hilfe des Flußlinienbildes veranschaulicht. Flußlinien sind besser als Feldlinien... Eine kritische Diskussion der Vorzüge und Defizite der traditionellen Feldlinien findet man in den Feynman Lectures on Physics. Feynman kritisiert insbesondere die fehlende relativistische Kovarianz des Feldlinienkonzepts. In Kap.?? werden wir sehen, wie sich die Flußlinien von  $B$  und  $D$  zu den Weltflächen der Faraday- und Maxwell-2-Formen relativistisch erweitern.

Zunächst wird wiederholt, was man unter einer Stromform versteht. An die Operationen inneres Produkt, äußeres Produkt, Cartan-Ableitung und Sternoperator auf Stromformen wird erinnert, und es wird dann zu den Ketten spezialisiert.

Die 2-Formen der magnetischen Feldstärke  $B$ , der elektrischen Erregung  $D$  und der elektrischen Stromdichte  $j$  werden im  $E_3$  durch 1-Ketten approximiert und veranschaulicht. Die Linien der 1-Kette von  $j$  heißen elektrische Stromlinien, die Linien der 1-Ketten von  $B$  und  $E$  heißen magnetische bzw. elektrische Flußlinien. Die 1-Formen der elektrischen Feldstärke  $E$  und der magnetischen Erregung  $H$  werden durch 2-Ketten approximiert und veranschaulicht. Der 3-Form der elektrischen Ladungsdichte  $\rho$  entspricht eine 0-Kette, d.h. ein System von Punktladungen. (Magnetische Flußlinien sind übrigens kein rein theoretisches Konstrukt sondern haben eine physikalische Realität in Typ-II-Supraleitern in der gemischten Phase. Eine entsprechende Realisierung elektrischer Flußlinien ist nicht bekannt. [Allerdings kennt man den gluonischen String der Quantenchromodynamik.] )

Zuerst interpretieren wir das Gesetz von der Quellenfreiheit der magnetischen Flußdichte ( $dB = 0$ ). Als Stromform betrachtet läßt sich  $B$  durch eine 1-Kette approximieren. Das Gesetz  $dB = 0$  wird dann zu  $-\partial B = 0$ . Der Rand der 1-Kette von  $B$  verschwindet also,

und wir können sagen, daß  $B$  aus randlosen Linien zusammengesetzt ist: magnetische Flußlinien haben keinen Anfang und kein Ende.

Abbildung: einige erlaubte Konfigurationen magnetischer Flußlinien

Ganz analog interpretieren wir das Gaußsche Gesetz  $dD = \rho$ . Die (als Stromform aufgefaßte und durch eine 1-Kette approximierte) elektrische Erregung  $D$  setzt sich aus elektrischen Flußlinien zusammen, die elektrische Ladungsdichte  $\rho$  aus Punktladungen. Das Gaußsche Gesetz wird zu  $-\partial D = \rho$ . Dies bedeutet, daß elektrische Flußlinien entweder geschlossen sind ( $\rho = 0 \leftrightarrow \partial D = 0$ ) oder aber auf positiven Ladungen beginnen und auf negativen enden. [Die Zuordnung positiv  $\leftrightarrow$  Anfang, und negativ  $\leftrightarrow$  Ende (und nicht umgekehrt) berücksichtigt das Minuszeichen im reformulierten Gaußschen Gesetz.]

Abbildung: einige mit dem Gaußschen Gesetz verträgliche Konfigurationen elektrischer Flußlinien. Beachte, daß diese Abbildung wie auch die letzte keiner realen physikalischen Situation entspricht. (Die Studenten wollen an dieser Stelle immer wissen, wie das Feld denn nun ‘wirklich aussieht’.) Die Abbildung illustriert lediglich den physikalischen Inhalt des Gaußschen Gesetzes und sonst nichts. (Um herauszufinden, wie das Feld wirklich aussieht, müssen alle Gleichungen der Elektrodynamik gleichzeitig betrachtet und gelöst werden.)

Im Flußlinienbild wird das Integral  $\int_S B$  ganz einfach durch (völlig metrikfreies) Abzählen der  $S$  kreuzenden Flußlinien berechnet. (Wenn alle Flußlinien denselben Fluß tragen, multiplizieren wir einfach mit dem Elementarfluß, ansonsten ist natürlich jede Flußlinie mit dem ihr eigenen Fluß zu gewichten.) Eine analoge Aussage gilt für das Integral  $\int_S D$ .

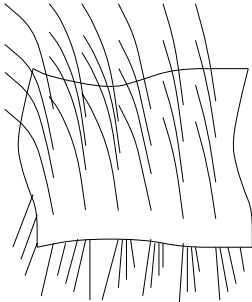


Abbildung 1.15.

Deutung des Induktionsgesetzes  $-\dot{B} = dE$ .  
 Betrachte zunächst den statischen Limes  $\dot{B} = 0$ . Unter der Approximation von  $E$  durch eine 2-Kette wird die Gleichung  $dE = 0$  zu  $\partial E = 0$ , d.h. die kleinen Flächenstücke der 2-Kette von  $E$  müssen sich zu randlosen oder geschlossenen Flächen, sogenannten *Äquipotentialflächen*,

zusammenfügen. (Der Rand von  $E$  im dynamischen Fall entspricht dem, was man gewöhnlich das dem Vektorfeld von  $E$  zugeordnete Wirbelfeld nennt.) Genauer gesprochen symbolisiert jede solche Fläche einen Spannungsabfall. Die Spannung  $\int_{\gamma} E$  wird berechnet, indem man die Spannungsabfälle an den vom Weg  $\gamma$  durchstoßenen Flächen von  $E$  aufammelt.

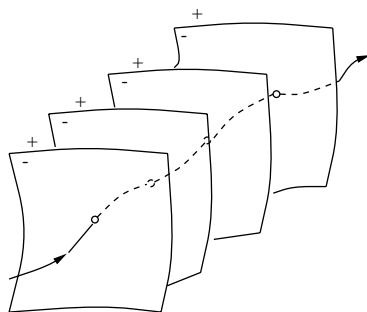


Abbildung 1.16.

Jetzt kommen wir zur dynamischen Interpretation des Induktionsgesetzes. Dies ist etwas heikel, weil die Bildung der Zeitableitung  $\dot{B}$  einen weiteren Grenzübergang erfordert, was die Anschauung erschwert. (Zu einer wirklich befriedigenden Interpretation werden wir erst im Rahmen der relativistischen Formulierung gelangen.) Eine wandernde magnetische Flußlinie zieht wie ein Komet einen ‘‘Schweif’’ elektrischer Feldstärke hinter sich her... Eine pfiffige Idee ist, einen ‘‘Zaun’’ von magnetischen Flußlinien (am besten in der Zaunebene selbst) wandern zu lassen. Das Induktionsgesetz behauptet dann, daß die Zaunfläche ein Flächenstück der 2-Kette von  $E$  ausmacht (Beweis mittels Lie-Ableitung...)

Analoges Vorgehen für das Ampère-Gesetz (Sprechweise noch nicht eingeführt): aus  $dH = j$  wird  $\partial H = j$ . Folglich liegen die Ränder der Flächenstücke der magnetischen Erregung  $H$  (in der Magnetostatik) genau auf den Stromlinien der elektrischen Stromdichte  $j$ ... Versuch einer Interpretation des dynamischen Ampère-Maxwell-Gesetzes...

Weitere Themen:...

Deutung der Lorentz-Kraftform  $i_{qv}B$  im Flußlinienbild...

Anschauliche Deutung der Poynting-2-Form  $E \wedge H$  als 1-Kette (den Stromlinien der Energie), die sich als Durchschnitt der 2-Ketten von  $E$  und  $H$  ergibt...



## 2. ElektroMagnetostatik

Thema dieses Kapitels ist die Maxwell'sche Theorie im statischen Limes, d.h. in Grenzfällen, wo die Zeitableitungen der elektromagnetischen Felder und ihrer Quellen verschwinden oder vernachlässigbar klein sind. Die Analyse des statischen Grenzfalles ist ein nützlicher Schritt hin zum Verständnis der vollen dynamischen Theorie. Historisch war es so, daß die Elektrodynamik aus bereits bekannten, im statischen Limes gültigen Gesetzen (Coulomb-Gesetz und Ampère-Gesetz) durch die von Faraday und Maxwell entdeckten bzw. postulierten Erweiterungen erhalten wurde. Für den Studenten hat die Untersuchung der Statik den didaktischen Vorteil strukturell einfacherer Gleichungen, an denen sich der noch ungewohnte mathematische Formalismus illustrieren und einüben läßt. Außerdem kann die Lösung der statischen Gleichungen auch für das Verständnis dynamischer Vorgänge hilfreich sein. Bekanntlich haben die Naturgesetze nach dem Einsteinschen Relativitätsprinzip in allen Inertialsystemen dieselbe Form. Diese Kovarianzeigenschaft ermöglicht es zum Beispiel, das elektromagnetische Feld einer gleichförmig geradlinig bewegten Ladungsverteilung aus dem Feld der ruhenden Ladungsverteilung in einfacher Weise durch Transformation der Raum-Zeit-Koordinaten zu gewinnen.

Der statische Grenzfall ist formal dadurch erklärt, daß alle Zeitableitungen durch Null ersetzt werden:  $\dot{\rho} = 0$ ,  $\dot{D} = 0$ ,  $\dot{B} = 0$  usw. Die Gleichungen der elektromagnetischen Theorie zerfallen dann in zwei Teilsysteme:

$$dD = \rho, \quad D = \varepsilon_0 \star E, \quad dE = 0; \quad (\text{Elektrostatik})$$

$$dH = j, \quad B = \mu_0 \star H, \quad dB = 0. \quad (\text{Magnetostatik})$$

In das erste System geht nur das elektrische Feld ein, in das zweite nur das magnetische. Dementsprechend nennen wir die beiden Teilsysteme die *Elektrostatik* bzw. *Magnetostatik*. Der statische Grenzfall  $dH = j$  des Ampère-Maxwell-Gesetzes heißt das *Ampèresche Gesetz*. Die Gleichung  $dE = 0$  besagt, daß die elektrische Feldstärke in der Elektrostatik wirbelfrei ist.

Zwischen den Gleichungssystemen der Elektro- und Magnetostatik besteht offensichtlich eine starke formale Ähnlichkeit. Wir werden sehen, daß infolge dieser Ähnlichkeit die Lösungsmethoden im wesentlichen identisch sind, weshalb wir die zwei Systeme weitgehend parallel behandeln können.

Diese Einheitlichkeit ist es, was durch die unkonventionelle Wahl der Kapitelüberschrift angekündigt werden soll.

Ein Caveat zur Magnetostatik ist angebracht. Aus dem Ampèreschen Gesetz folgt durch Differenzieren  $dj = d(dH) = 0$ . Für die mathematische Konsistenz des magnetostatischen Gleichungssystems ist also die Quellenfreiheit der elektrischen Ladungsdichte notwendige Voraussetzung. Was hier besonders betont werden soll, ist, daß  $dj = 0$  *global* (und nicht etwa nur lokal) erfüllt sein muß. Ist  $dj = 0$  auf Teilen des Raumes verletzt, kann die Anwendung des Ampère-Gesetzes zu Widersprüchen führen. Ein Standardbeispiel ist das folgende. Betrachte eine punktförmige Ladungsquelle, von der ein sphärisch symmetrischer und zeitlich konstanter Stromfluß ausgeht. Experimentell läßt sich eine solche Quelle als radioaktive Probe (z.B. 1 Gramm des Elements X – hier ist noch ein radioaktives Element mit einer geeigneten Halbwertszeit auszusuchen) realisieren. Für Zeiten, die viel kürzer als die Halbwertszeit der Quelle sind, kann der Stromfluß im Kurzzeitmittel als stationär angesehen werden, was eine “statische” Situation suggeriert. Aufgrund des Ladungserhaltungssatzes gilt außerdem  $dj = 0$  außerhalb der Probe, wo  $\dot{\rho} = 0$  ist. Weil  $H = 0$  in der Magnetostatik  $j = dH = 0$  impliziert, könnte man jetzt den Fehlschluß ziehen, daß die beschriebene Anordnung (für die  $j$  ja von Null verschieden ist) ein Magnetfeld produzieren muß. Ein von Null verschiedenes Magnetfeld stünde aber im Widerspruch zur sphärischen Symmetrie des Problems (in welche Richtung sollte der magnetische Fluß denn zeigen?!) und liegt in Wirklichkeit auch gar nicht vor. Warum ist das Ampère-Gesetz hier nicht anwendbar? Die Antwort lautet, daß der radial nach außen gerichtete Strom auf der radioaktiven Probe eine Gesamtladung zurückläßt, die mit der Zeit anwächst. Dadurch wird nach dem Gaußschen Gesetz ein zeitlich veränderlicher elektrischer Fluß ( $\dot{D} \neq 0$ ) erzeugt, der im Ampère-Maxwell-Gesetz nicht vernachlässigt werden darf. (Vor dem Hintergrund der anschaulichen Deutung des Ampère-Maxwell-Gesetzes durch Flußlinien ist dieser ganze Sachverhalt sofort klar.)

*Aufgabe 2.0.1.* Zeige  $j + \dot{D} = 0$  für die beschriebene Anordnung.

## 2.1 Elementare Anwendungen

An zwei elementaren Beispielen soll der praktische Umgang mit dem vielleicht noch ungewohnten äußeren Kalkül demonstriert werden.

### 2.1.1 Elektrostatik: Kugelkondensator

*Aufgabe 2.1.1.* Im  $E_3$  mit dem kartesischen Koordinatensystem  $\{o; e_x, e_y, e_z\}$  definieren wir sphärische Polarkoordinaten (oder Kugelkoordinaten)  $r, \theta, \varphi$  wie üblich durch  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$  und  $z = r \cos \theta$ . Zeige: (1) Die Volumenform  $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$  wird in Kugelkoordinaten durch

$\Omega = r^2 \sin \theta \, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$  ausgedrückt. (2) Die drei 1-Formen  $(dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi)$  bilden außer auf der  $z$ -Achse eine rechtshändige (lokale) Orthonormalbasis. (3)  $\star dr = r^2 \tau$ , wobei  $\tau = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$  die auf den Koordinatenursprung  $o$  bezogene Raumwinkelform ist. (4) Jede bzgl.  $o$  dreihinvariante 1-Form bzw. 2-Form ist von der Gestalt  $f(r)dr$  bzw.  $g(r)\tau$ .

*Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung.* Für eine vorgegebene, bzgl. des Ursprungs dreihinvariante Ladungsdichte  $\rho = \chi(r)dx \wedge dy \wedge dz$  soll das zugehörige elektrische Feld berechnet werden. Naheliegender Grund der Symmetrie des Problems ist der "radiale" Ansatz  $E = f(r)dr$ . Als erstes überprüfen wir, daß dieser Ansatz der Forderung der Wirbelfreiheit ( $dE = 0$ ) genügt. Differenzieren gibt  $dE = f'(r)dr \wedge dr$  was wegen  $dr \wedge dr = -dr \wedge dr = 0$  tatsächlich verschwindet. Um nun eine Bestimmungsgleichung für die unbekannte Funktion  $f(r)$  zu erhalten, setzen wir den Ansatz unter Verwendung der Materialgleichung in das Gaußsche Gesetz ein:

$$\begin{aligned} \rho/\varepsilon_0 = dD/\varepsilon_0 &= d \star E = d(f(r) \star dr) = d(r^2 f(r) \tau) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f(r)) dr \wedge \tau = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f(r)) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

wobei für das fünfte Gleichheitszeichen die Geschlossenheit der Raumwinkelform ( $d\tau = 0$  für  $r > 0$ ) benutzt wurde. Vergleich der rechten Seite mit der Koordinatendarstellung von  $\rho$  liefert eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung für  $f(r)$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 f(r) = \chi(r)/\varepsilon_0.$$

Hieraus folgt durch einfache Quadratur das Ergebnis

$$f(R) = \frac{1}{\varepsilon_0 R^2} \int_0^R \chi(r) r^2 dr.$$

*Beispiel 2.1.1 (Kugelkondensator).* Der Kugelkondensator ist eine konzentrische Anordnung zweier metallischer Kugelschalen mit entgegengesetztem Ladungszustand (Abb. 2.1). Sei  $Q$  die Ladung auf der inneren Kugelschale mit Radius  $R_1$  und  $-Q$  die Ladung auf der äußeren mit Radius  $R_2$ . Ausführen des Radialintegrals gibt in diesem Fall  $\int_0^\infty \chi(r) r^2 dr = \text{const}$  für  $R_1 < R < R_2$ , und Null sonst. Mit  $dx \wedge dy \wedge dz = dr \wedge r^2 \tau$  und  $\int \tau = 4\pi$  folgt  $\text{const} = Q/4\pi$  und

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} dr/r^2 & \text{für } R_1 < r < R_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die elektrische Spannung  $U$  des Kondensators ist definiert als das Wegintegral der elektrischen Feldstärke zwischen zwei Punkten  $a$  und  $b$  auf der inneren bzw. äußeren Kugelschale. Der Wert dieses Integral hängt nur von den beiden Radien ab:

$$U = \int_a^b E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

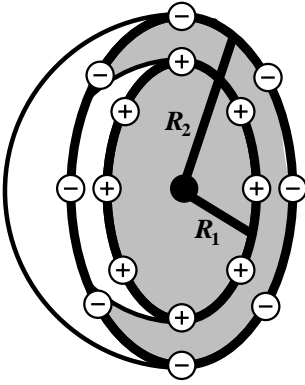


Abbildung 2.1. Kugelkondensator im Querschnitt

Unter der *Kapazität*  $C$  eines Kondensators versteht man das Verhältnis von Ladung  $Q$  zu Spannung  $U$ . Für den Kugelkondensator resultiert

$$C = Q/U = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1) .$$

*Aufgabe 2.1.2.* (1) Berechne die im Zwischenraum enthaltene Feldenergie  $W_{\text{feld}}$ . (2) Wie groß ist die Energie  $w(Q)\delta Q$ , die man aufbringen muß, um die infinitesimale Ladungsmenge  $\delta Q$  von der inneren zur äußeren Schale zu transportieren? Welche Energie  $W_{\text{konf}}$  ist daher nötig, um die Konfiguration aufzubauen? Vergleiche das Ergebnis mit  $W_{\text{feld}}$ . (3) Wie ändert sich die Kapazität des Kugelkondensators, wenn der Zwischenraum von einem (nichtleitenden) Dielektrikum mit der dielektrischen Konstanten  $\epsilon > 1$  ausgefüllt wird?

### 2.1.2 Magnetostatik: Messung von $\mu_0$

*Aufgabe 2.1.3.* Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  entstehen aus den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  dadurch, daß man in der  $xy$ -Ebene zur Polardarstellung übergeht:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Zeige: (1) Die drei 1-Formen  $(dr, d\varphi, dz)$  bilden für  $r \neq 0$  eine rechtshändige Orthogonalbasis mit  $(dr, dr) = 1 = (dz, dz)$  und  $(d\varphi, d\varphi) = 1/r^2$ . (2) Der Sternoperator wirkt wie folgt:  $\star(dz \wedge dr) = r d\varphi$ ,  $\star(dr \wedge d\varphi) = r^{-1} dz$  und  $\star(d\varphi \wedge dz) = r^{-1} dr$ .

*Magnetfeld eines unendlich langen, geraden, stromführenden Drahtes.* Gegeben sei in Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  die Stromdichte

$$j = dr \wedge r d\varphi \times \begin{cases} I/\pi R^2 & \text{für } r < R, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie beschreibt den homogenen Stromfluß eines unendlich langen, geraden und um die  $z$ -Achse zentrierten Drahtes mit kreisförmiger Querschnittsfläche  $\pi R^2$

und Gesamtstrom  $I$ .<sup>1</sup> Wie sieht das Magnetfeld eines solchen Stromflusses aus? Dazu machen wir den allgemeinsten zylindersymmetrischen Ansatz:

$$B = f(r)dr \wedge d\varphi + g(r)d\varphi \wedge dz + h(r)dz \wedge dr .$$

(Sicherlich ist das Resultat für  $B$  jedem Physik-Studenten aus dem Einführungskurs längst bekannt, aber wir stellen uns hier "dumm" und wollen sehen, ob wir mit dem allgemeinen Ansatz zurechtkommen.) Die Quellenfreiheit der magnetischen Feldstärke ( $dB = 0$ ) erfordert  $g'(r) = 0$  und somit  $g(r) = g_0 = \text{const}$ . Nun ist aber die 2-Form  $g_0 d\varphi \wedge dz$  wegen der Unbestimmtheit der Winkel-1-Form  $d\varphi$  auf der  $z$ -Achse  $r = 0$  *singulär*. (Regulär wäre  $rd\varphi \wedge dz$  mit einem zusätzlichem Faktor  $r$ .) Da es hier keinen Grund für das Auftreten von Singularitäten in  $B$  gibt, folgt  $g_0 = 0$ . Im nächsten Schritt übersetzen wir die Feldstärke  $B$  mit der Materialgleichung in die Erregung  $H$ :

$$\mu_0 H = \star B = r^{-1}f(r)dz + rh(r)d\varphi .$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in das Ampèresche Gesetz liefert

$$\mu_0 j = d(\mu_0 H) = \frac{\partial}{\partial r}(f(r)/r)dr \wedge dz + \frac{\partial}{\partial r}(rh(r))dr \wedge d\varphi .$$

Durch Vergleich mit der vorgegebenen Stromdichte  $j$  folgen die Differentialgleichungen  $\partial/\partial r (f(r)/r) = 0$  und

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} rh(r) = \begin{cases} \mu_0 I / \pi R^2 & \text{für } r < R , \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Die regulären Lösungen dieser Gleichungen sind  $f(r) = f_0 r$  bzw.

$$h(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{cases} r/R^2 & \text{für } r < R , \\ h_0/r & \text{sonst .} \end{cases}$$

Die Stetigkeit von  $H$  erfordert  $h_0 = 1$ . Unbestimmt bleibt dagegen die Integrationskonstante  $f_0$ . Wie sollen wir das interpretieren? Hierzu ist zu bemerken, daß  $B = f_0 dr \wedge rd\varphi = f_0 dx \wedge dy$  eine Lösung des homogenen Gleichungssystems  $d\star B = 0 = dB$  ist. Nun kann man zu einer Lösung  $B$  von  $d\star B = \mu_0 j$  und  $dB = 0$  immer eine beliebige Lösung des homogenen Systems hinzufügen und erhält wieder eine Lösung. Welche Lösung die physikalisch richtige ist, wird erst durch die Angabe zusätzlicher Forderungen, oder Randbedingungen, festgelegt. (Diese Unterbestimmtheit bei fehlenden Randbedingungen ist eine generelle Eigenschaft linearer Differentialgleichungen.) Wir suchen hier das Magnetfeld des stromführenden Drahts *und weiter nichts*.<sup>2</sup> Die für unsere Zwecke richtige Lösung wird also durch die Forderung  $B = 0$  für  $I = 0$  bestimmt. Es folgt  $f_0 = 0$  und insgesamt

<sup>1</sup> Vor dem Hintergrund der zu Anfang des Kapitels ausgesprochenen Warnung ist dieses Beispiel als schwach pathologisch einzustufen. Ein unendlich langer, gerader, stromführender Draht akkumuliert Ladungen im Unendlichen. Dieses Problem läßt sich dadurch umgehen, daß man  $z = +\infty$  mit  $z = -\infty$  identifiziert.

<sup>2</sup> Als Ursache des räumlich konstanten Magnetfeldes  $B = f_0 dx \wedge dy$  könnten wir uns eine kosmische Spule vorstellen, die den gesamten Raum umschließt.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} dz \wedge dr \times \begin{cases} r/R^2 & \text{für } r < R, \\ 1/r & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie man an  $H = \text{const} \times d\varphi$  (für  $r > R$ ) erkennt, fällt die magnetische Spannung längs der Koordinatenlinien des Winkels  $\varphi$  ab oder, anders ausgedrückt, der magnetische Fluß zirkuliert um den Draht (Abb. 2.2).

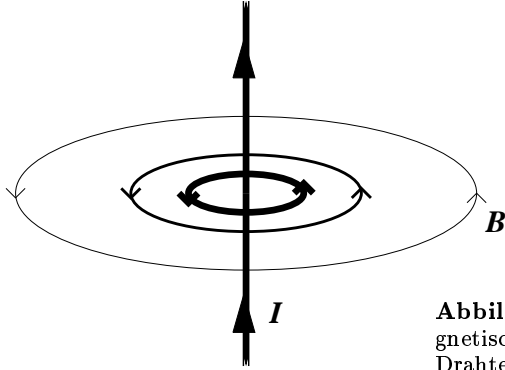


Abbildung 2.2. Magnetische Flußlinien eines stromführenden Drahtes. Orientierung ist anzupassen

*Festlegung von  $\mu_0$ .* Wir kommentieren jetzt die Festlegung der empirischen Konstanten  $\mu_0$  im SI-Maßsystem. Dazu bringen wir in das eben berechnete Magnetfeld einen geraden Testdraht der Länge  $L$ . Der Testdraht sei praktisch ausdehnungslos und trage den Strom  $I'$ . Seine beiden Endpunkte seien mit  $p$  und  $p'$  bezeichnet. Nach Aufg. ?? ist die Linearform der auf den Testdraht wirkenden Lorentz-Kraft  $K$  durch

$$K = I' \int_0^1 B_{p+s(p'-p)}(\bullet, p' - p) ds .$$

gegeben. Für eine parallele Anordnung der Drähte ( $p' - p = Le_z$ ) erhalten wir

$$K = I' B_p(\bullet, Le_z) = -\frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r(p)} (dr)_p .$$

Die Lorentz-Kraft zeigt für  $I I' > 0$  radial nach innen, d.h. die beiden Drähte ziehen sich an, wenn die Ströme in die gleiche Richtung fließen. Pro Länge  $L$  des Testdrahtes hat die Kraft im Abstand  $d = r(p)$  den Betrag  $\mu_0 I I' / 2\pi d$ . Im SI-Maßsystem trifft man die willkürliche Festlegung  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Newton}/(\text{Ampere})^2$ . Hiermit folgt:

*Definition 2.1.* 1 Ampere ist der Strom, den zwei unendlich lange, gerade, parallele Drähte tragen, wenn sie im Abstand von 1 Meter die Kraft  $2 \times 10^{-7}$  Newton pro Meter (ihrer Länge) aufeinander ausüben. ■

Umgekehrt ließe sich die Naturkonstante  $\mu_0$  nach einer unabhängigen Festlegung der Stromeinheit durch die Messung der Kraft zwischen stromführenden geraden Leitern nach obiger Formel bestimmen.

*Aufgabe 2.1.4.* Gegeben sei die statische und quellenfreie Stromdichte  $j = f(x)dx \wedge dy$  (mit irgendeiner Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Um die Akkumulation von Ladungen im Unendlichen zu vermeiden, verlangen wir  $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$  und  $f(\pm\infty) = 0$ . Wie sieht das Magnetfeld dieser Stromdichte aus?

## 2.2 Poisson-Gleichung

Das Gleichungssystem der Elektrostatik wie auch der Magnetostatik läßt sich als Poisson-Problem auffassen. Für vorgegebene Ladungen und Ströme ist dieses Problem eindeutig und in geschlossener Form lösbar.

### 2.2.1 Elektrostatik

*Elektrostatistisches Potential.* Als unmittelbare Konsequenz der Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke ( $dE = 0$ ) ist in der Elektrostatik das Linienintegral von  $E$  längs eines beliebigen geschlossenen Weges  $\gamma = \partial S$  gleich Null:

$$\int_{\gamma} E = \int_{\partial S} E = \int_S dE = 0.$$

Wir sagen auch, daß die elektrostatische Ringspannung längs jeder Schleife  $\gamma = \partial S$  verschwindet. Betrachte nun zwei Wege  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , die den Anfangs- und Endpunkt  $a$  bzw.  $b$  gemein haben. Die Differenz der Wege ist dann eine Schleife,  $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial S$ , und

$$0 = \int_{\partial S} E = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} E \iff \int_{\gamma_1} E = \int_{\gamma_2} E.$$

Eine zum Verschwinden der Ringspannung äquivalente Aussage ist also, daß die Spannung  $\int_{\gamma} E$  nur vom Rand  $\partial\gamma = b - a$  abhängt, nicht aber vom Weg  $\gamma$  selbst. Es existiert daher eine Funktion  $\Phi$  mit der Eigenschaft  $\int_{\gamma} E = \Phi(a) - \Phi(b)$  für jede Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E_3$  mit  $\gamma(0) = a$  und  $\gamma(1) = b$ . Diese Funktion ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt und heißt ein *elektrostatistisches Potential*. Der differentielle Zusammenhang zwischen  $E$  und  $\Phi$  lautet  $E = -d\Phi$ .

*Potential einer Punktladung.* In Abschn. 2.1.1 hatten wir das elektrische Feld eines um den Koordinatenursprung  $o$  zentrierten Kugelkondensators mit Ladung  $q$  und Radien  $R_1$  und  $R_2$  berechnet. Für die Feldstärke im Zwischenraum  $R_1 < r < R_2$  ergab sich  $E = (q/4\pi\epsilon_0)dr/r^2$ . Wir schicken jetzt  $R_2 \rightarrow \infty$  und  $R_1 \rightarrow 0$ . Was wir dann erhalten, ist das Feld einer Punktladung  $q$  am Ort  $o$  (mit einer neutralisierenden Ladung  $-q$  im Unendlichen).

Befindet sich die Ladung am Ort  $p$ , so ist die auf den Ursprung bezogene Abstandsfunktion  $r$  durch den Abstand von  $p$ ,  $r_p(p') = d(p, p') = |p - p'|$ , zu ersetzen:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr_p}{r_p^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r_p}\right).$$

Durch Integration des Differentials entsteht die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten,

$$\Phi(a) - \Phi(b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_p(a)} - \frac{1}{r_p(b)} \right).$$

Hieraus erhalten wir mit der Konvention  $\Phi(\infty) = 0$  die Formel

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p}.$$

Das elektrostatische Potential  $\Phi$  einer am Ort  $p$  ruhenden Punktladung ist also invers proportional zum Abstand von  $p$ . Die Größen  $\Phi$  und  $E = -d\Phi$  sind wohldefiniert auf  $E_3 \setminus \{p\}$ .

*Poisson-Gleichung.* Durch Einsetzen von  $D = \epsilon_0 \star E = -\epsilon_0 \star d\Phi$  in das Gaußsche Gesetz ( $dD = \rho$ ) erhalten wir die Gleichung  $\rho = -\epsilon_0 d \star d\Phi$ . Anwenden des Sternoperators auf beiden Seiten ergibt

$$\star d \star d\Phi = -\star \rho / \epsilon_0.$$

Mit dem Operator  $\delta : \Lambda^{k+1}(E_3) \rightarrow \Lambda^k(E_3)$ ,  $\alpha \mapsto (-1)^k \star^{-1} d \star \alpha$  läßt sich die linke Seite auch in der kürzeren Form  $\delta d\Phi$  schreiben. Die Verkettung  $\delta \circ d$  ist eine Hälfte des Laplace-Operators  $\Delta = \delta \circ d + d \circ \delta$ . Die andere Hälfte dürfen wir wegen  $\delta\Phi = 0$  ( $\delta$  verschwindet auf den Funktionen) ergänzen. Es folgt

$$\Delta\Phi = -\star \rho / \epsilon_0.$$

Die Gleichung  $\Delta f = g$  für eine unbekannte und eine bekannte Funktion  $f$  bzw.  $g$  heißt *Poisson-Gleichung*. Wir sehen, daß das elektrostatische Potential einer Poisson-Gleichung genügt. Im ladungsfreien Raum ( $\rho = 0$ ) erfüllt  $\Phi$  die *Laplace-Gleichung*  $\Delta\Phi = 0$ .

*Lösung der Poisson-Gleichung.* Mit der uns schon bekannten Formel für das Potential einer Punktladung können wir die Lösung der Poisson-Gleichung sofort angeben. Für eine Anordnung von  $N$  Ladungen  $q_i$  an den Orten  $p_i$  entsteht durch lineare Superposition

$$\Phi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|p - p_i|}.$$

Im Limes einer kontinuierlichen Ladungsdichte  $\rho$  wird die Summe zu einem Integral,

$$\Phi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_U \frac{\rho}{r_p},$$



wobei wir voraussetzen, daß alle Ladungen in einem beschränkten Raumgebiet  $U \subset E_3$  enthalten sind. Für eine vorgegebene Ladungsdichte  $\rho$  ist das elektrostatische Problem hierdurch auf die Auswertung von Integralen zurückgeführt und kann als im Prinzip gelöst betrachtet werden. Damit ist das Thema der Elektrostatik aber mitnichten erschöpft, denn die Ladungsdichte ist in vielen Fällen a priori unbekannt und muß erst berechnet werden.

*Beispiel 2.2.1.* Die Voraussetzung der Beschränktheit von  $U$  garantiert die Existenz des Integrals. Sie läßt sich abschwächen, aber nicht völlig eliminieren, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt. Betrachte einen unendlich langen, geraden, metallischen Draht mit Ladung  $q$  pro Länge  $\ell$ . Der Draht liege auf der  $z$ -Achse. Ohne Mühe läßt sich verifizieren, daß die Funktion

$$\Phi = \frac{q}{2\pi\ell\epsilon_0} \ln \left( R / \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

mit einer beliebigen Konstanten  $R > 0$  ein Potential für dieses Problem ist. Andererseits führt die Anwendung der Lösungsformel für die Poisson-Gleichung hier auf ein divergentes Integral:

$$\Phi(p) \stackrel{?}{=} \frac{q}{4\pi\ell\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}} \frac{dz}{\sqrt{x^2(p) + y^2(p) + z^2}} = \infty.$$

(Der gewünschte Ausdruck für  $\Phi$  läßt sich wiedergewinnen, indem man das  $z$ -Integral bei  $z = \pm R/2$  mit  $R^2 \gg x^2(p) + y^2(p)$  abschneidet.)

## 2.2.2 Magnetostatik

*Vektorpotential.* Auf einem sternförmigen Gebiet  $U \subset E_3$  ist die Bedingung  $dB = 0$  durch  $B = dA$  global lösbar. Die 1-Form  $A$  heißt ein *Vektorpotential* von  $B$ . Sie ist nicht eindeutig bestimmt, denn mit  $A$  löst auch  $A + d\psi$  (mit einer beliebigen Funktion  $\psi$ ) die Gleichung  $B = dA$ . Die Transformation  $A \mapsto A + d\psi$  heißt *Eichtransformation*.

*Mitteilung.* So wie wir das Vektorpotential eingeführt haben, bekommt man den Eindruck, es handle sich um fiktive Hilfsgröße ohne direkte Beobachtbarkeit oder Realität. Obwohl sich einer solchen Auffassung im Rahmen der klassischen Elektrodynamik nicht ernsthaft widersprechen läßt, wird man in der Quantenmechanik geladener Teilchen (z.B. durch den Aharonov-Bohm-Effekt) eines anderen belehrt. Eine Andeutung von dieser tieferen Bedeutung gibt die Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik (Kap. ??), die auf dem Vektorpotential (oder genauer: seiner relativistischen Erweiterung, dem Eichpotential) als dem fundamentalen Feld beruht.

*Coulomb-Eichung.* Wir setzen  $\mu_0 H = \star B = \star dA$  in das Ampèresche Gesetz  $dH = j$  ein und wenden auf beiden Seiten den Sternoperator an. Dann folgt:

$$\star d \star dA = \mu_0 \star j.$$

Die linke Seite ist gleich  $-\delta dA$ . Wählen wir  $A$  nun so, daß  $\delta A$  verschwindet, dann haben wir

$$-\delta dA = -(\delta d + d\delta)A = -\Delta A,$$

und es folgt eine Gleichung vom Poisson-Typ für  $A$ :

$$\Delta A = -\mu_0 \star j \quad (\text{falls } \delta A = 0).$$

Die Nützlichkeit des Vektorpotentials besteht also darin, daß es uns die Reduktion des magnetostatischen Problems auf ein Poisson-artiges Problem ermöglicht. Die Bedingung  $\delta A = 0$  heißt *Coulomb-Eichung*. In kartesischen Koordinaten ( $A = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ ) lautet sie

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Die Coulomb-Eichung läßt sich immer erfüllen. In der Tat können wir für  $\delta A = f \neq 0$  das Differential einer Lösung  $\psi$  der Poisson-Gleichung  $-\Delta\psi = f$  zu  $A$  addieren, und es gilt dann

$$\delta(A + d\psi) = \delta A + \Delta\psi = f - f = 0,$$

d.h. das eichtransformierte Vektorpotential  $A' = A + d\psi$  genügt der Coulomb-Eichung.

*Lösung der Poisson-Gleichung.* Wir schreiben  $\star j = \sum_k (\star j)_k dx^k$ . Mit der (nur in kartesischen Koordinaten gültigen!) Relation

$$\Delta \left( \sum_i A_i dx^i \right) = \sum_i (\Delta A_i) dx^i$$

folgt dann

$$\Delta A_k = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_k = -\mu_0 (\star j)_k \quad (k = x, y, z).$$

Dies sind drei entkoppelte Poisson-Gleichungen für die kartesischen Komponenten von  $A$ . Ihre Lösung ist uns aus der Elektrostatik bereits bekannt:

$$A_k(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_U \frac{(\star j)_k}{r_p} dx \wedge dy \wedge dz \quad (k = x, y, z).$$

$U$  ist hier ein beschränktes Gebiet, außerhalb dessen die Stromdichte verschwindet.

*Vektorpotential einer Stromschleife.* Die Rechnung im folgenden Beispiel ist noch unnötig umständlich. Besser wäre es, bereits hier die Relation die für eine Schleife  $\gamma$  mit Strom  $I$  gültige Relation

$$A_k(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_U j \wedge \frac{dx_k}{r_p} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\gamma \frac{dx_k}{r_p}$$

zu beweisen und zu benützen. (Diese Art von Relation wird im vorliegenden Manuskript bei der Berechnung des magnetischen Dipolmoments einer stromführenden Schleife ausführlich hergeleitet.)

*Beispiel 2.2.2.* In der  $xy$ -Ebene liege eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius  $R$  und Mittelpunkt am Koordinatenursprung (Abb. 2.3). Es fließe der Strom  $I$ . Zu berechnen sei das Vektorpotential  $A$  in der Coulomb-Eichung  $\delta A = 0$ . Aufgrund der Invarianz des Problems unter Drehungen um die  $z$ -

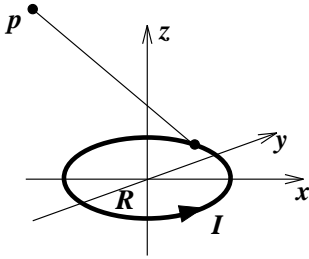


Abbildung 2.3. Skizze zu Bsp. 2.2.2

Achse bietet sich die Einführung von Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  an. Leider gilt die Poisson-Gleichung nur für die *kartesischen* Komponenten von  $A$ , weshalb wir kartesisch beginnen müssen. Der Strom fließt längs des Kreises  $C := \{p | x^2(p) + y^2(p) = R^2, z(p) = 0\}$ . Da die Stromdichte linienförmig ist, können wir das Volumenintegral für  $A_x, A_y, A_z$  zu einem Linienintegral längs  $C$  reduzieren. Die zu integrierende 1-Form bekommen wir dadurch, daß wir die Zylinderkoordinaten  $z$  und  $r$  "ausintegrieren", d.h. das innere Produkt von  $r_p^{-1}(\star j)_k dx \wedge dy \wedge dz$  mit den Vektorfeldern  $\partial_r$  und  $\partial_z$  bilden (wobei der Strom  $I$  aufgesammelt wird) und das Resultat auf  $C$  einschränken. Für die  $y$ -Komponente erhalten wir

$$\frac{(\star j)_y}{r_p} dx \wedge dy \wedge dz \xrightarrow{\partial_r \rightarrow 1, \partial_z \rightarrow 1} I \cos \varphi \times r d\varphi|_C,$$

und somit ( $r|_C = R, \varphi|_C =: \gamma$ ):

$$A_y(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta d\beta}{\left[ (x(p) - R \cos \beta)^2 + (y(p) - R \sin \beta)^2 + z^2(p) \right]^{1/2}}.$$

Für die  $x$ -Komponente gilt eine analoge Gleichung, die durch die Substitution  $\cos \beta d\beta \rightarrow -\sin \beta d\beta$  entsteht. Die  $z$ -Komponente  $A_z$  verschwindet wegen  $(\star j)_z = j_{xy} = 0$ . An dieser Stelle ist der Wechsel zu Zylinderkoordinaten ( $A = A_r dr + A_\varphi d\varphi$ ) gefahrlos möglich. Die Radialkomponente  $A_r = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi$  ergibt sich letztendlich zu Null, was seinen Grund in  $\star j \sim d\varphi$  hat. Für die Winkelkomponente  $A_\varphi = -A_x r \sin \varphi + A_y r \cos \varphi$  folgt nach einer Variablensubstitution ( $\beta + \varphi \rightarrow \beta$ )

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} IRr \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta d\beta}{(r^2 + z^2 - 2Rr \cos \beta + R^2)^{1/2}}.$$

Dies ist ein sogenanntes *elliptisches Integral*; es läßt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken, findet sich aber in mathematischen Formelsammlungen tabelliert. Um hier noch weiterzukommen, spezialisieren wir zur Fernzone  $r^2 + z^2 \gg R^2$ . In diesem Grenzfall dürfen wir die Quadratwurzel im Nenner des Integranden Taylor-entwickeln,

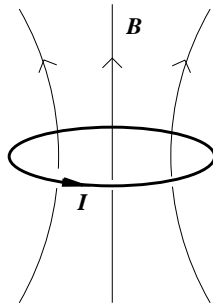
$$(r^2 + z^2 - 2Rr \cos \beta + R^2)^{-1/2} = (r^2 + z^2)^{-1/2} \left( 1 + \frac{Rr \cos \beta}{r^2 + z^2} + \dots \right),$$

und Ausführen des Integrals resultiert in

$$A = \frac{\mu_0}{4} IR^2 (r^2 + z^2)^{-3/2} r^2 d\varphi + \dots$$

Einmal Differenzieren gibt die magnetische Feldstärke

$$B = dA = \frac{\mu_0}{4} IR^2 (r^2 + z^2)^{-5/2} ((2z^2 - r^2)dr - 3rzdz) \wedge rd\varphi + \dots$$



**Abbildung 2.4.** Magnetische Flußlinien einer stromführenden Leiterschleife

In dieses Fernfeld bringen wir jetzt eine zweite kreisförmige Leiterschleife mit Radius  $R'$  und Strom  $I'$ . Wir interessieren uns für die Kraft, die die beiden Schleifen aufeinander ausüben, wenn die zweite Schleife wie die erste zur  $xy$ -Ebene parallel liegt und um die  $z$ -Achse zentriert ist. Nach Aufg. ?? ist die  $z$ -Komponente der Lorentz-Kraft auf das infinitesimale Stück der zweiten Schleife am Ort  $p$  ( $r(p) = R'$ ) mit Tangentenvektor  $\epsilon \partial_\varphi(p)$  gleich

$$K_z(p) = I' B_p(e_z, \epsilon \partial_\varphi(p)).$$

Durch Aufintegrieren der Beiträge erhalten wir für die Gesamtkraft

$$K_z dz = -\frac{3\pi\mu_0}{2} IR^2 I' R'^2 \frac{dz}{z^4} + \dots$$

Die anderen Kraftkomponenten müssen in diesem Spezialfall aus Symmetriegründen verschwinden. Wir sehen, daß die Kraft zwischen den Schleifen für den Fall gleicher Stromrichtung ( $II' > 0$ ) attraktiv ist und dem Betrag nach wie die vierte Potenz des inversen Abstands abfällt.

*Aufgabe 2.2.1.* Wie hängt die Kraft vom Abstand ab, wenn die beiden Schleifen in der gleichen Ebene liegen?

## 2.3 Multipolentwicklung (kartesisch)

Für vorgegebene Ladungen und Ströme ist das Problem der ElektroMagnetostatik durch die Lösung der Poisson-Gleichung auf Integrationen zurückgeführt. Die exakte Berechnung der Integrale kann mitunter aufwendig sein. In der Praxis ist man jedoch oft nur am Verhalten der Lösung *fern* von den Quellen interessiert. Wie wir schon gesehen haben, ergeben sich in diesem Grenzfall Vereinfachungen. Die Systematisierung der in Bsp. 2.2.2 verwendeten Näherung führt auf eine Entwicklung nach Multipolen.

*Notation.* Um die Notation abzukürzen, bedienen wir uns hier der im Ricci-Kalkül üblichen *Einsteinschen Summenkonvention*, nach der über jeden doppelt auftretenden, einmal hoch- und einmal tiefgestellten Index automatisch zu summieren ist. Im folgenden schreiben wir also  $x_i x^i$  anstelle von  $x^2 + y^2 + z^2$ .<sup>3</sup>

### 2.3.1 Elektrostatik

Wir betrachten eine Anordnung von Ladungen, die in einem endlichen Raumbereich  $U \subset E_3$  enthalten sind. Ohne Verlust an Allgemeinheit wählen wir diesen Bereich als eine Kugel mit Radius  $R$  und Mittelpunkt am Koordinatenursprung,  $U = B_R$ . Wir fragen jetzt, wie das elektrostatische Potential einer solchen Ladungsverteilung “in der Ferne aussieht”. Dazu ist unser Ausgangspunkt die Formel

$$\Phi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{B_R} \frac{\rho}{r_p}.$$

Die auf den Punkt  $p$  bezogene Abstandsfunktion  $r_p$  hat in kartesischen Koordinaten den Ausdruck

$$\begin{aligned} r_p(\bullet) = d(\bullet, p) &= \sqrt{(x_i(\bullet) - x_i(p))(x^i(\bullet) - x^i(p))} \\ &= \sqrt{r^2(\bullet) - 2x_i(\bullet)x^i(p) + r^2(p)}, \end{aligned}$$

wobei  $r = \sqrt{x_i x^i}$  der Abstand vom Koordinatenursprung ist. Per Voraussetzung gilt  $R \ll r(p)$ , und mit der Taylor-Entwicklung  $(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)$  haben wir

$$\begin{aligned} r_p(\bullet)^{-1} &= r(p)^{-1} \left( 1 + \frac{r^2(\bullet) - 2x_i(\bullet)x^i(p)}{r^2(p)} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r(p)} + \frac{x^i(p)}{r^3(p)} x_i(\bullet) + \frac{1}{2} \frac{x^i(p)x^j(p)}{r^5(p)} (3x_i(\bullet)x_j(\bullet) - \delta_{ij}r^2(\bullet)) + \dots \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Auf den tieferen Sinn der Tief- und Hochstellung von Indizes, nämlich der Unterscheidung zwischen “kontravarianten” und “kovarianten” Tensoren, wie es in der alten Diktion heißt, wird hier nicht eingegangen.

Wir setzen diese Entwicklung in die Formel für  $\Phi(p)$  ein und führen die Integration aus. Dann resultiert

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q^{(0)} \frac{1}{r} + q_i^{(1)} \frac{x^i}{r^3} + \frac{1}{2} q_{ij}^{(2)} \frac{x^i x^j}{r^5} + \dots \right),$$

wobei die folgenden Größen eingeführt wurden:

$$\text{Monopolmoment: } q^{(0)} = \int \rho, \quad \text{Dipolmoment: } q_i^{(1)} = \int x_i \rho,$$

$$\text{Quadrupolmoment: } q_{ij}^{(2)} = \int (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho.$$

Das Integral erstreckt sich in jedem Fall über den endlichen, ladungserfüllten Raumbereich  $U = B_R$ . Beim Monopolmoment handelt es sich um nichts anderes als die Gesamtladung der Anordnung, und das zugehörige Potential fällt wie  $r^{-1}$  ab. Für das Dipolmoment geht der Abfall wie  $r^{-2}$ , für das Quadrupolmoment wie  $r^{-3}$ . Die angegebenen Terme sind die ersten drei in einer unendlichen Reihe, der sogenannten *Multipol-Entwicklung*. Das Potential des Multipolmoments  $l$ -ter Ordnung,  $q^{(l)}$ , fällt ab wie  $r^{-l-1}$ .

*Aufgabe 2.3.1. Berechnung der Multipolmomente einiger einfacher Ladungsverteilungen...*

*Aufgabe 2.3.2. Kraft zwischen elektrischen Dipolen...*

### 2.3.2 Magnetostatik

Auch hier gehen wir von der Lösung der Poisson-Gleichung aus,

$$A_k(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_U \frac{(\star j)_k}{r_p} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Für den Zweck einer Multipol-Entwicklung ist es günstig, den Integranden etwas umzuschreiben. Wir setzen  $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$  und machen folgende kleine Rechnung:

$$(\star j)_k \Omega = (\partial_k \lrcorner \star j) \wedge \Omega = (\partial_k \lrcorner \Omega) \wedge \star j = j \wedge \star(\partial_k \lrcorner \Omega) = j \wedge dx_k.$$

Diese Rechnung gehört nach oben (Poisson-Gleichung: Magnetostatik), und man sollte gleich mit der folgenden Gleichung beginnen: Hiermit wird die Formel für das Vektorpotential zu

$$A_k(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{B_R} \frac{j \wedge dx_k}{r_p}.$$

Jetzt spezialisieren wir wieder zur Fernzone, indem wir die Taylor-Entwicklung für  $r_p^{-1}$  einsetzen:

$$A_k(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{B_R} \left( \frac{1}{r(p)} + \frac{x^l(p)}{r^3(p)} x_l(\bullet) + \dots \right) j \wedge dx_k.$$

Wegen der magnetostatischen Bedingung der Stromerhaltung ( $dj = 0$ ) gilt  $\int j \wedge dx_k = -\int dj \wedge x_k = 0$ , so daß der Monopolterm hier verschwindet. Der nächste Term in der Entwicklung ist

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} m_{kl} \frac{x^k dx^l}{r^3} + \dots$$

Hierbei bezeichnet  $m$  einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe,

$$m_{kl} := \int j \wedge x_k dx_l = -m_{lk},$$

der das *magnetische Dipolmoment* genannt wird. (Die Antisymmetrie folgt durch partielle Integration.) Wir sehen, daß das Vektorpotential eines magnetischen Dipols wie das Quadrat des inversen Abstandes abfällt (vgl. das Potential eines elektrischen Dipols, Abschn. 2.3.1).

*Aufgabe 2.3.3.* Gehe analog zum elektrischen Fall vor und treibe die Entwicklung bis zum magnetischen Quadrupolmoment.

*Aufgabe 2.3.4.* Wie vergleichen sich die Felder des elektrischen und magnetischen Dipols? Sind sie identisch?

*Beispiel 2.3.1.* Gegeben sei eine Leiterschleife beliebiger Form  $\gamma$  mit Strom  $I$  (Abb. 2.5 illustriert den Fall, daß  $\gamma$  in der  $xy$ -Ebene liegt). Was läßt sich über das magnetische Dipolmoment einer solchen Schleife sagen? (Die folgende Rechnung wird durch die im Abschnitt über die Poisson-Gleichung getroffene Vorbereitung redundant. Wir benützen sofort:)

$$\int_{B_R} j \wedge x dy = I \int_{\gamma} x dy.$$

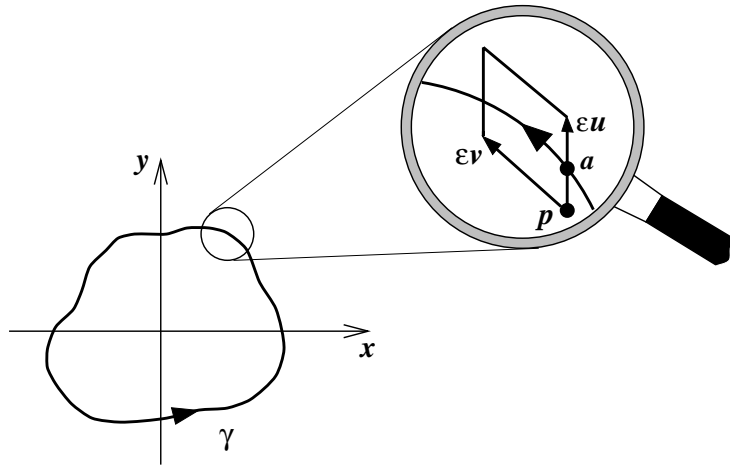
Betrachte dazu speziell die  $xy$ -Komponente  $m_{xy} = \int j \wedge x dy$ . Wir behaupten, daß für den vorliegenden Fall einer linienförmigen Stromdichte gilt

$$m_{xy} = \int_{B_R} j \wedge x dy = I \int_{\gamma} x dy.$$

Beim Beweis machen wir uns die Tatsache zunutze, daß die Integration von Differentialformen metrikfrei erklärt ist. Wir führen krummlinige Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  mit Differentialen  $d\xi$ ,  $d\eta$  und  $d\zeta$  ein und bezeichnen die Dualbasis der Vektorfelder wie üblich mit  $\partial_\xi$ ,  $\partial_\eta$  und  $\partial_\zeta$ . Die Koordinaten wählen wir so, daß  $\gamma$  eine Koordinatenlinie von  $\eta$  ist:

$$\gamma = \{p \in E_3 \mid \xi(p) = \xi_0; \zeta(p) = \zeta_0\}.$$

Für einen Punkt  $a \in \gamma$  setze  $u = \partial_\xi(p)$ ,  $v = \partial_\eta(p)$ ,  $w = \partial_\zeta(p)$  und betrachte das Parallelepiped mit Basispunkt  $p = a - \epsilon(u + w)/2$  und Kantenvektoren  $\epsilon u$ ,  $\epsilon v$ ,  $\epsilon w$  (vgl. Abb. 2.5). Der Beitrag von diesem Parallelepiped zum Volumenintegral  $\int j \wedge x dy$  ist



**Abbildung 2.5.** Ein Teil der in der  $xy$ -Ebene liegenden Leiterschleife  $\gamma$  wird von dem Parallelepiped mit Basispunkt  $p$  und Kantenvektoren  $\epsilon u$ ,  $\epsilon v$ ,  $\epsilon w$  überdeckt.

$$\begin{aligned} & \int_0^\epsilon \left( \int_0^\epsilon (j \wedge x dy)_{p+su+tw}(u, \epsilon v, w) dt \right) ds + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= (x dy)_a(v) \int_0^\epsilon \left( \int_0^\epsilon j_{p+su+tw}(w, u) dt \right) ds + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= (x dy)_a(v) \times I + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Da die rechte Seite der entsprechende Beitrag zum Linienintegral  $I \int_\gamma x dy$  ist, folgt die Behauptung. Dieses Resultat läßt sich auf einfache Weise geometrisch deuten. Sei  $\gamma_{xy}$  die orthogonale Projektion von  $\gamma$  auf die  $xy$ -Ebene. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß diese Projektion  $\pi$  auf  $\gamma$  bijektiv ist und durch  $\gamma = \pi^{-1}(\gamma_{xy})$  umgekehrt werden kann. Die 1-Form  $x dy$  bleibt unter dem Zurückholen mittels  $\pi^{-1}$  ungeändert, so daß mit  $\gamma_{xy} = \partial S$  ( $S$  liegt natürlich in der  $xy$ -Ebene) und dem Satz von Stokes folgt

$$m_{xy}/I = \int_{\pi^{-1}(\gamma_{xy})} x dy = \int_{\gamma_{xy}} x dy = \int_S dx \wedge dy = \text{Fläche}(S).$$

Die  $xy$ -Komponente des magnetischen Dipolmoments der Schleife  $\gamma$  ist also gleich dem Strom  $I$  mal der von der Projektion von  $\gamma$  auf die  $xy$ -Ebene (im orientierten Sinn) eingeschlossenen Fläche. Eine analoge Aussage gilt für die  $yz$ - und  $zx$ -Komponenten. Zum Schluß betrachten wir noch den Spezialfall einer kreisförmigen Leiterschleife mit Radius  $R$  in der  $xy$ -Ebene. Mit  $m_{xy} = \pi IR^2$  und  $m_{yz} = m_{zx} = 0$  erhalten wir

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} m_{ij} \frac{x^i dx^j}{r^3} = \frac{\mu_0 IR^2}{4} \frac{x dy - y dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Nach Übergang zu Zylinderkoordinaten stimmt dieser Ausdruck mit dem führenden Term des Resultats von Bsp. 2.2.2 überein.



## 2.4 Randwertaufgaben

### 2.4.1 Die Greenschen Identitäten

In der theoretischen Physik im allgemeinen, insbesondere aber für die Elektromagnetostatik, sind zwei nach Green benannte Identitäten von großem Nutzen. Sie beruhen auf der folgenden Konstruktion. Gegeben sei ein beschränktes Gebiet  $U$ . Für jedes Paar von 1-Formen  $\alpha$  und  $\beta$  definieren wir das reellwertige Produkt

$$(\alpha|\beta)_U := \int_U \alpha \wedge \star\beta.$$

Dieses Produkt ist in beiden Argumenten linear und wegen  $\alpha \wedge \star\beta = \beta \wedge \star\alpha$  symmetrisch. Außerdem ist es positiv definit, wie man an der Koordinatendarstellung ( $\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i$ ,  $\beta = \sum_i \beta_i dx^i$ )

$$(\alpha|\beta)_U = \int_U \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i \beta_i \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

sofort sieht. Es hat also die Eigenschaften eines *Skalarproduktes*. Nun setzen wir speziell  $\alpha = df$  und  $\beta = dg$ , wobei  $f$  und  $g$  zwei Funktionen auf  $U$  sind, und wenden die Produktregel für  $d$  an:

$$df \wedge \star dg = d(f \wedge \star dg) - f d \star dg.$$

Der zweite Term auf der rechten Seite läßt sich auch in der Form  $-f \star \Delta g$  schreiben. Durch Integration über  $U$  und Anwenden des Stokesschen Satzes im ersten Term auf der rechten Seite entsteht

$$(df|dg)_U = \int_{\partial U} f \star dg - \int_U f \star \Delta g \quad (1. \text{ Greensche Identität}).$$

Nun tauschen wir in der 1. Greenschen Identität  $f$  und  $g$  aus, subtrahieren die Gleichungen und verwenden die Symmetrie  $(df|dg)_U = (dg|df)_U$ . Dann resultiert:

$$\int_{\partial U} (f \star dg - g \star df) = \int_U (f \star \Delta g - g \star \Delta f) \quad (2. \text{ Greensche Identität}).$$

Wir sehen, daß in die Formulierung der Greenschen Identitäten die metrische Struktur des Euklidischen Raumes in wesentlicher Weise eingeht.

### 2.4.2 Elektrostatik: Poisson- und Dirichlet-Problem

Für vorgegebene Ladungsdichte  $\rho$  wird das elektrostatische Problem durch die Lösung der Poisson-Gleichung  $\Phi(p) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int \rho/r_p$  auf die Berechnung von Integralen zurückgeführt. In Anwesenheit metallischer Leiter ist die Ladungsdichte jedoch keine Größe, die wir als gegeben ansehen können. Sie stellt sich im Gleichgewicht genau so ein, daß das elektrische Feld im Innern

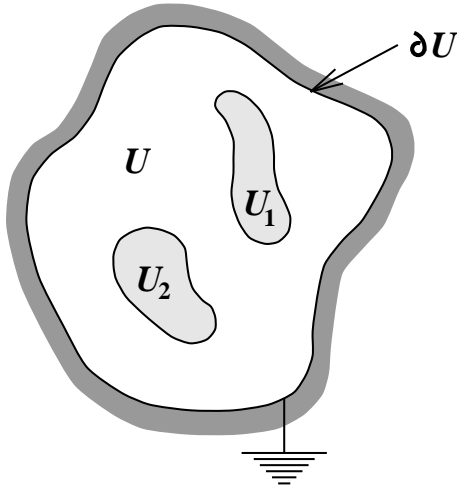


Abbildung 2.6. Eine typische Konstellation für das Randwertproblem

des Leiters verschwindet. Die Problemstellung besteht in einem solchen Fall u.a. darin, die auf der Oberfläche des Leiters induzierte Flächenladungsdichte zu berechnen. Betrachte zum Beispiel Abb. 2.6. Gezeigt ist dort ein Gebiet  $U$ , das von der Oberfläche  $\partial U$  eines metallischen Leiters berandet wird. In  $U$  befinden sich Bereiche  $U_1$  und  $U_2$  (z.B. elektrisch geladene Isolatoren) mit vorgegebener Ladungsdichte  $\rho = \rho^{(1)} + \rho^{(2)}$ . Der Leiter sei "geerdet", d.h. er habe eine leitende Verbindung nach Unendlich, so daß  $\Phi|_{\partial U} = \Phi(\infty) = 0$ . Das Problem besteht nun darin,  $\Phi$  so zu bestimmen, daß die Poisson-Gleichung  $-\Delta\Phi = \star\rho/\varepsilon_0$  erfüllt ist und gleichzeitig  $\Phi$  auf dem Rand von  $U$  verschwindet.

*Definition.* Die Aufgabe: "Löse für vorgegebene Ladungsdichte  $\rho$  die Poisson-Gleichung  $-\Delta\Phi = \star\rho/\varepsilon_0$  auf  $U \setminus \partial U$  zur Randbedingung  $\Phi|_{\partial U} = 0$ " heißt *Poisson-Problem*. ■

Von Interesse ist auch der Fall, daß die Ladungsdichte auf dem Inneren von  $U$  verschwindet und der Rand  $\partial U$  (der auch aus mehreren Teilen bestehen kann) auf einem festen Potential gehalten wird.

*Definition.* Die Aufgabe: "Löse  $\Delta\Phi = 0$  auf  $U \setminus \partial U$  zu vorgegebenem Randpotential  $\Phi|_{\partial U}$ " heißt *Dirichlet-Problem*. ■

Die allgemeinste Randwertaufgabe besteht in der Lösung der Poisson-Gleichung unter Vorgabe der Ladungsdichte auf dem Inneren von  $U$  und des Potentials auf dem Rand von  $U$ . Wegen der Linearität der Poisson-Gleichung zerfällt die allgemeine Aufgabe in ein Poisson-Problem und ein Dirichlet-Problem. Unter schwachen Voraussetzungen an  $U$  läßt sich zeigen, daß Poisson- und Dirichlet-Problem eindeutig lösbar sind. Die Lösungstheorie beruht auf dem Konzept der Greenschen Funktion.

**Beachte die Komplementarität von Poisson- und Dirichlet-Problem:** im ersten wird die Ladungsdichte im Inneren von  $U$  vorgegeben und

das Potential auf dem Rand gleich Null gesetzt, im zweiten dagegen wird die Ladungsdichte im Inneren gleich Null gesetzt und das Potential auf dem Rand vorgegeben.

*Definition.* Sei  $U$  ein beschränktes Gebiet. Besser wäre es, schon hier und nicht erst später mit der Dirac- $\delta$ -Distribution zu arbeiten. Die *Greensche Funktion* zu  $U$  ist eine Abbildung:  $U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \mapsto G(a, b)$  mit den Eigenschaften

- (1)  $G(a, b) - (4\pi|a - b|)^{-1}$  ist regulär für  $a = b$ ,
- (2)  $(\Delta G)(\bullet, b) = 0$  auf  $U \setminus (\partial U \cup \{b\})$ ,
- (3)  $G(\bullet, b)|_{\partial U} = 0$ .

In Worten:  $G(a, b)$  ist (abgesehen von einem Faktor  $\varepsilon_0$ ) das elektrostatische Potential im Punkt  $a$ , das eine im Punkt  $b$  ruhende Einheitsladung verursacht, wenn der Rand  $\partial U$  geerdet ist.

*Mitteilung.* Die Beschränktheit von  $U$  wird verlangt, um mathematische Pathologien auszuschließen. Gewöhnlich existiert  $G$  (und ist eindeutig) auch für unbeschränktes  $U$ . In diesem Fall wird man verlangen, daß  $G$  im Unendlichen verschwindet. Zum Beispiel ist die Greensche Funktion zu  $U = E_3$  gleich

$$G(a, b) = \frac{1}{4\pi|a - b|}.$$

*Eindeutigkeit der Greenschen Funktion.* Die Bedingungen (1–3) legen  $G(a, b)$  eindeutig fest. Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, es gäbe zwei Greensche Funktionen  $G_1$  und  $G_2$  und betrachten für einen fest gewählten Punkt  $p \in U \setminus \partial U$  die Differenz  $g := G_1(\bullet, p) - G_2(\bullet, p)$ . Diese Funktion ist aufgrund von (1) im Punkt  $p$  regulär. Nach (2) und (3) gilt  $\Delta g = 0$  auf  $U \setminus \partial U$  und  $g|_{\partial U} = 0$ . Hiermit liefert die erste Greensche Identität

$$(dg|dg)_U = \int_U dg \wedge \star dg = \int_{\partial U} g \star dg - \int_U g \star \Delta g = 0 - 0 = 0,$$

und die positive Definitheit des Skalarprodukts  $(dg|dg)_U \geq 0$  erzwingt  $g \equiv 0$ .

*Lösung des Poisson-Problems.* Per Definition der Greenschen Funktion ist das Potential  $\Phi(a)$  einer am Ort  $b$  ruhenden Ladung  $q$  gleich  $G(a, b)q/\varepsilon_0$ . Durch Übergang zum Integral erhalten wir trivialerweise

$$\Phi(p) = \int_U G(p, \bullet)\rho/\varepsilon_0.$$

*Lösung des Dirichlet-Problems.* Die folgende Rechnung ist durch Verwenden der Dirac- $\delta$ -Distribution abzukürzen. Unser Vorgehen ist hier ganz ähnlich wie in Bsp. 2.6.1. Es sei  $B_\epsilon(p)$  wieder der Ball mit Mittelpunkt  $p \in U \setminus \partial U$  und Radius  $\epsilon$ . Wir wenden die zweite Greensche Identität mit  $f = \Phi$  und  $g = G(\bullet, p)$  auf das Gebiet  $U \setminus B_\epsilon(p)$  an. Da dort  $\Delta G(\bullet, p) = 0 = \Delta \Phi$  gilt, folgt:

$$\int_{\partial B_\epsilon(p)} (G(\bullet, p) \star d\Phi - \Phi \star dG(\bullet, p)) = \int_{\partial U} (G(\bullet, p) \star d\Phi - \Phi \star dG(\bullet, p)) .$$

Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet infolge der Randbedingung  $G(\bullet, p)|_{\partial U} = 0$ . Auf der linken Seite erhalten wir (vgl. Bsp. 2.6.1)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_\epsilon(p)} (G(\bullet, p) \star d\Phi - \Phi \star dG(\bullet, p)) = \Phi(p) .$$

Folglich wird das Dirichlet-Problem durch

$$\Phi(p) = - \int_{\partial U} \Phi \star dG(\bullet, p)$$

gelöst. Dieses Resultat drückt  $\Phi$  im Inneren von  $U$  durch seine Werte auf dem Rand  $\partial U$  aus.

*Symmetrie der Greenschen Funktion.* Für zwei Punkte  $a, b \in U \setminus \partial U$  betrachten wir das Gebiet  $U \setminus (\partial U \cup B_\epsilon(a) \cup B_\epsilon(b))$  und setzen in der zweiten Greenschen Identität  $f = G(\bullet, a)$  und  $g = G(\bullet, b)$ . Eine analoge Rechnung wie oben führt dann auf die Symmetrierelation

$$G(a, b) = G(b, a) .$$

Auch hier hilft die Dirac- $\delta$ -Distribution.

*Poisson-Kern.* Die in der Lösung des Dirichlet-Problems auftretende 2-Form  $-\star dG(\bullet, p)|_{\partial U}$  ( $p$  fest, anderes Argument variabel) heißt *Poisson-Kern*. Sie hat die folgende physikalische Interpretation. Wir bringen eine Ladung  $q$  an den Ort  $p$  und erden den Rand  $\partial U$ . Dann ist das elektrostatische Potential durch  $\Phi = G(\bullet, p)q/\epsilon_0$  gegeben, und es gilt

$$D = \epsilon_0 \star E = -\epsilon_0 \star d\Phi = -q \star dG(\bullet, p) .$$

Die Verdrängung des elektrischen Feldes aus dem Metall wird durch Oberflächenladungen auf mit Flächendichte-2-Form  $\sigma$  auf  $\partial U$  bewirkt. Die Anschlußbedingung für die Tangentialkomponente von  $D$  auf  $\partial U$  lautet

$$\sigma = -D \Big|_{\partial U} = q \star dG(\bullet, p) \Big|_{\partial U} .$$

Wir können also  $\star dG(\bullet, p)|_{\partial U}$  als die durch eine Einheitsladung am Ort  $p$  auf der metallischen Oberfläche  $\partial U$  induzierte Flächenladungsdichte auffassen. (wobei  $\partial U$  durch die nach außen zeigende Normale orientiert wird.)

*Bildladungsmethode.* Hier wäre kurz das Prinzip der Bildladungsmethode zu erläutern. Für den Halbraum kommt man mit einer einzigen Bildladung aus, für den Raum zwischen zwei parallelen Ebenen benötigt man schon unendlich viele. Ein berühmtes nichttriviales Beispiel, wo mit einer Bildladung auskommt, ist die Kugel (Kelvin).

*Beispiel 2.4.1.* Oben haben wir gezeigt, daß die Lösung des Poisson- und Dirichlet-Problems durch die Greensche Funktion ausgedrückt werden kann. Unser Ziel ist daher die Berechnung der letzteren. Obwohl dies im allgemeinen die Hilfe eines Computers erfordert, gelingt in einigen Fällen mit hoher Symmetrie auch die analytische Berechnung. Ein solcher Spezialfall ist die Kugel  $U = B_R$ . Ohne Verlust an Allgemeinheit legen wir den Kugelmittelpunkt in den Koordinatenursprung  $o$ . Zu berechnen ist für einen festen Punkt  $a \in B_R \setminus \partial B_R$  die Greensche Funktion  $G(\bullet, a)$ , was sich mit dem folgenden Trick (Lord Kelvin) bewerkstelligen läßt. Sei  $d(o, a) \neq 0$  der Abstand des Punktes  $a$  von  $o$ . Wir wählen den Punkt  $A$  auf der Geraden durch  $o$  und  $a$  so, daß gilt (siehe Abb. 2.7):

$$\frac{R}{d(o, a)} = \frac{d(o, A)}{R}.$$

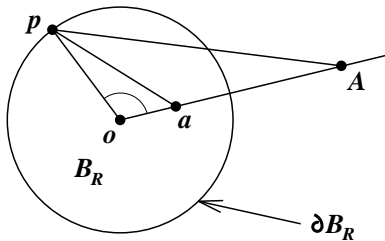


Abbildung 2.7. Skizze zu Bsp. 2.4.1

Zwischen den Koordinaten der Punkte  $a$  und  $A$  besteht dann die Beziehung  $x^i(A) = (R/d(o, a))^2 x^i(a)$ . Nun betrachten wir irgendeinen Punkt  $p$  auf  $\partial B_R$ . Die beiden Dreiecke  $poa$  und  $poA$  sind einander ähnlich. (In der Tat ist ihnen ein Winkel gemein, und die Seiten haben per Wahl von  $A$  gleiche relative Längen.) Deshalb gilt die elementargeometrische Relation  $R/d(p, a) = d(o, A)/d(p, A)$  oder äquivalent

$$\frac{1}{d(p, a)} = \frac{1}{d(p, A)} \times \frac{d(o, A)}{R} = \frac{1}{d(p, A)} \times \frac{R}{d(o, a)}.$$

Der wichtige Schluß, den wir hieraus ziehen, ist, daß die Funktion

$$g = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_A} \times \frac{R}{d(o, a)} \right)$$

auf dem Rand der Kugel  $\partial B_R$  verschwindet. Nun läßt sich aber  $\varepsilon_0 g$  als das Potential zweier Punktladungen auffassen: einer Einheitsladung am Ort  $a$  und einer "Spiegelladung"  $-R/d(o, a)$  am Ort  $A \notin B_R$ . Als solches genügt  $g$  der Laplace-Gleichung auf  $B_R \setminus \{a\}$ . Außerdem ist die Funktion  $g - (4\pi r_a)^{-1}$  am Punkt  $a$  regulär. Damit erfüllt  $g$  genau die an die Greensche Funktion gestellten Forderungen. Da die Greensche Funktion eindeutig ist, folgt  $g = G(\bullet, a)$ .

*Aufgabe 2.4.1.* Verifiziere für das Beispiel der Kugel  $U = B_R$  die Symmetrie  $G(a, b) = G(b, a)$ , und berechne den Poisson-Kern  $-d \star G(\bullet, p)|_{\partial U}$ .

### 2.4.3 Magnetostatik: Abschirmung durch Supraströme

Das magnetostatische Analogon zur Abschirmung des elektrischen Feldes durch ein Metall ist die Verdrängung des magnetischen Feldes aus einem Supraleiter.<sup>4</sup> To be continued

## 2.5 Energiebetrachtungen

### 2.5.1 Kapazitätskoeffizienten

*Energie eines Systems von Punktladungen.* Ein punktförmiger Körper, der sich am Ort  $p_1$  befindet und die Ladung  $q_1$  trägt, erzeugt wie wir wissen die elektrische Feldstärke  $E^{(1)} = (q_1/4\pi\epsilon_0)dr_{p_1}/r_{p_1}^2$ . Um in diesem Feld einen zweiten punktförmigen Körper mit Ladung  $q_2$  aus dem Unendlichen an die Stelle  $p_2$  zu bringen, ist die Arbeit

$$-q_2 \int E^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_2}{|p_1 - p_2|} =: W_{12}$$

erforderlich. (Für  $q_1 q_2 < 0$  ist die Arbeit negativ, d.h. es wird Energie frei.) Transportieren wir nun im elektrischen Feld der schon vorhandenen Ladungen eine dritte Punktladung  $q_3$  an den Ort  $p_3$ , so ist die Arbeit  $W_{13} + W_{23}$  zu verrichten. Wir setzen diese Prozedur fort, bis wir  $N$  Punktladungen  $q_i$  an die Positionen  $p_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) gebracht haben. Die zum Aufbau der Gesamtkonfiguration nötige Energie ist dann eine Summe über  $N(N-1)/2$  Paare,

$$W = \sum_{i < j} W_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{|p_i - p_j|}.$$

Äquivalent können wir schreiben

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi^{(i)}(p_i) q_i, \quad \Phi^{(i)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|p_j - \bullet|},$$

wobei in der Potentialfunktion  $\Phi^{(i)}$  der  $i$ -te Summand weggelassen wird, um den divergenten Beitrag der "Selbstenergie"  $W_{ii} \sim q_i^2/|p_i - p_i| = \infty$  auszuschließen.

<sup>4</sup> Genau gesprochen benötigt man einen Supraleiter in der sogenannten Meißner-Ochsenfeld-Phase.

*Energie eines Ladungskontinuums.* In Abschn. 1.8 haben wir über die Herleitung des Energiesatzes motiviert, daß die Energiedichte des elektrischen Feldes durch  $(1/2)E \wedge D$  gegeben ist. Demnach berechnet sich die in einer kontinuierlichen Ladungsverteilung mit elektrischer Feldstärke  $E$  und Erregung  $D$  gespeicherte Energie zu

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \int E \wedge D .$$

Wie hängt dieser Ausdruck mit jenem für das System von Punktladungen zusammen? Dazu machen wir mit  $E = -d\Phi$  eine partielle Integration [wobei  $\Phi(\infty) = 0$  benützt wird] und verwenden das Gaußsche Gesetz  $dD = \rho$ :

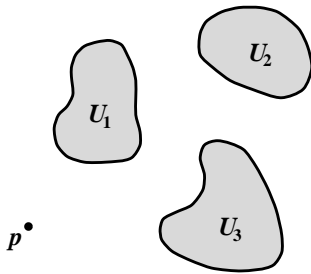
$$\tilde{W} = -\frac{1}{2} \int d\Phi \wedge D = \frac{1}{2} \int \Phi dD = \frac{1}{2} \int \Phi \rho .$$

Offenbar ist  $\tilde{W}$  die kontinuierliche Version des diskreten Ausdrucks  $W$ . Bei genauerem Hinsehen tut sich jedoch eine Diskrepanz auf. Die Energie

$$\tilde{W} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E \wedge \star E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) dx \wedge dy \wedge dz \geq 0$$

ist immer positiv, während  $W$  auch negativ (z.B. für ein System von zwei Punkten mit Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens) sein kann. Der Unterschied rührt daher, daß  $\tilde{W}$  Selbstenergiebeiträge enthält, die in dem Ausdruck für  $W$  weggelassen wurden. Die Problematik wird besonders deutlich, wenn wir die Feldenergie einer elektrisch geladenen Kugel mit Radius  $R$  betrachten. Aus dimensionellen Gründen (oder durch kurze Rechnung) folgt, daß diese Energie im Limes einer Punktladung ( $R \rightarrow 0$ ) wie  $R^{-1}$  divergiert. Diese Divergenz ist nichttrivialer Natur<sup>5</sup> und deutet an, daß die Elektrodynamik bei kurzen Skalen modifiziert und durch eine fundamentalere Theorie vervollständigt werden muß.

*Kapazitätskoeffizienten.* Wir betrachten jetzt wie in Abb. 2.8 illustriert eine Anordnung von  $N$  elektrischen Leitern  $U_1, U_2, \dots, U_N$ . Das elektrostatische



**Abbildung 2.8.** Eine kapazitives System metallischer Bereiche

<sup>5</sup> In der Quantenelektrodynamik werden solche Divergenzen phänomenologisch beseitigt, indem man die Theorie "regularisiert" und "renormiert".

Potential  $\Phi$  ist auf jedem Leiter konstant,  $\Phi|_{U_i} = \Phi_i$ , und wir wählen  $\Phi(\infty) = 0$ . Mit der Ladung  $Q_i = \int_{U_i} \rho$  auf  $U_i$  erhalten wir dann für die Gesamtenergie des Systems

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \int \Phi \rho = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i .$$

Die Ladungen sitzen alle auf den Oberflächen  $\partial U_i$ . Unser Ziel ist es hier, die Energie als quadratische Form in den konstanten Potentialen  $\Phi_i$  auszudrücken. Es seien also die  $\Phi_i$  vorgegeben. Wir haben es dann auf  $U = E_3 \setminus (\cup_{i=1}^N U_i)$  mit einem Dirichlet-Problem zu tun, dessen Lösung für das Potential  $\Phi$  im Punkt  $p$  sich folgendermaßen aufschreiben läßt:

$$\Phi(p) = \sum_{j=1}^N \Phi_j K_j(p) ,$$

wobei  $K_j$  durch Integrieren des Poisson-Kerns über die Oberfläche  $-\partial U_j$  berechnet wird,

$$K_j(p) := \int_{\partial U_j} \star dG(\bullet, p) .$$

(Beachte  $\partial U = -\sum_j \partial U_j$ .) Diesem Potential entspricht die elektrische Erregung

$$D = \varepsilon_0 \star E = -\varepsilon_0 \star d\Phi = -\sum_j \Phi_j \varepsilon_0 \star dK_j .$$

Es sei nun  $\sigma^{(i)}$  die Flächenladungsdichte auf der  $i$ -ten Leiteroberfläche  $\partial U_i$  (die durch den nach  $U$  gerichteten Normalenvektor orientiert wird). Dann gilt über  $\partial U_i$  hinweg die Anschlußbedingung

$$D|_{\partial U_i} = \sigma^{(i)} ,$$

und durch Integration über  $\partial U_i$  erhalten wir die Ladung

$$Q_i = \int_{\partial U_i} \sigma^{(i)} = \sum_j \Phi_j \int_{\partial U_i} (-\varepsilon_0 \star dK_j) = \sum_j C_{ij} \Phi_j .$$

Die reellen Zahlen  $C_{ij} = -\varepsilon_0 \int_{\partial U_i} \star dK_j$  heißen *Kapazitätskoeffizienten*. Sie sind allein durch die Geometrie der Anordnung bestimmt und vom Ladungszustand und/oder den Potentialen der Leiter unabhängig. Ihre Berechnung setzt die Kenntnis der Greenschen Funktion des Randwertproblems voraus und ist daher im allgemeinen schwierig. Aus der Symmetrie der Greenschen Funktion folgt

$$C_{ij} = -\varepsilon_0 \int_{\partial U_i} \star dK_j = -\varepsilon_0 \int_{\partial U_j} \star dK_i = C_{ji} .$$

Insgesamt erhalten wir für die elektrostatische Energie der Anordnung



$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \Phi_i \Phi_j .$$

*Beispiel.* Welches?

### 2.5.2 Induktionskoeffizienten

*Energie eines Systems stromführender Schleifen.* Betrachte eine Anordnung von  $N$  Leiterschleifen  $\gamma_i$  beliebiger Form, Größe und Ausdehnung (ABBILDUNG). Ausgehend von einem Anfangszustand ohne Stromfluß werde der Strom in  $\gamma_i$  auf den stationären Wert  $I_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) hochgefahren. Dabei ist von der Stromquelle wegen des Induktionsgesetzes eine Gesamtarbeit  $W$  zu verrichten, die nach dem Energiesatz (Abschn. 1.8) im aufgebauten Magnetfeld gespeichert wird:

$$W = \frac{1}{2} \int B \wedge H .$$

In der Elektrostatik haben wir gesehen, daß die elektrische Feldenergie  $\frac{1}{2} \int E \wedge D$  für eine kontinuierliche Ladungsdichte  $\rho$  mit Potential  $\Phi$  [ $\Phi(\infty) = 0$ ] sich in die Form  $\frac{1}{2} \int \rho \Phi$  bringen läßt. Ein analoges Umschreiben nehmen wir jetzt in der Magnetostatik vor, wobei das Vektorpotential  $A$  das Potential  $\Phi$  ersetzt, und die Rolle von  $\rho$  durch  $j$  übernommen wird. Sei also  $A$  ein Vektorpotential von  $B$ . Dann folgt durch partielle Integration

$$W = \frac{1}{2} \int dA \wedge H = \frac{1}{2} \int A \wedge dH = \frac{1}{2} \int A \wedge j .$$

(Hier wurde natürlich angenommen, daß das Magnetfeld im Unendlichen schnell genug abfällt, so daß die Integrale existieren und auch kein Randterm bei der partiellen Integration entsteht.) Der Ausdruck  $\int A \wedge j$  ist nicht manifest eichinvariant, da  $A$  unter einer Eichtransformation in  $A + d\psi$  übergeht. Jedoch verschwindet der entstehende Zusatzterm dank  $\int d\psi \wedge j = - \int \psi dj$  und der magnetostatischen Zwangsbedingung  $dj = 0$ .

*Aufgabe 2.5.1.* Die in einem System stromführender Schleifen gespeicherte magnetische Energie ist quadratisch im Magnetfeld. Verdoppeln wir die Ströme (und damit das Magnetfeld), so vervierfacht sich die Energie. Folglich nimmt die magnetische Energie zu, wenn wir zwei Leiterschleifen mit festen und gleichgerichteten Strömen  $I$  und  $I'$  aufeinander zubewegen. Man könnte deshalb meinen, daß sich die Leiterschleifen für  $II' > 0$  abstoßen. In Abschn. 2.1.2 (Festlegung von  $\mu_0$ ) und Bsp. 2.2.2 hatten wir aber gezeigt, daß die Kraft zwischen Schleifen mit gleichgerichteten Strömen *attraktiv* ist! Wo liegt der Denkfehler?

*Induktionskoeffizienten.* Wir nehmen jetzt an, daß die Stromdichte  $j^{(i)}$  der  $i$ -ten Leiterschleife mit dem Strom  $I_i$  skaliert:  $\star j^{(i)} = I_i \times \omega^{(i)}$ . Die dimensionslose 1-Form  $\omega^{(i)}$  beschreibt das "Stromdichteprofil" der  $i$ -ten Schleife. Dann wählen wir wieder die Coulomb-Eichung für  $A = \sum_k A_k dx^k$  und haben nach Abschn. 2.3.2

$$A_k(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N I_i \int_{\gamma_i} \frac{\omega_k^{(i)} dV}{r_p},$$

wobei  $dV$  die kartesische Volumenform  $dx \wedge dy \wedge dz$  bezeichnet. Diesen Ausdruck setzen wir in die Formel

$$W = \frac{1}{2} \int (A_x j_{yz} + A_y j_{zx} + A_z j_{xy}) dV$$

ein, worauf Doppelintegrale entstehen,

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma_i} dV \int_{\gamma_j} dV' \frac{\sum_k \omega_k^{(i)}(x, y, z) \omega_k^{(j)}(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

deren mit den Strömen gewichtete Summe die Energie  $W$  ergibt:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N L_{ij} I_i I_j.$$

Die Größen  $L_{ij}$  heißen *Induktionskoeffizienten*. Für  $i \neq j$  sprechen wir von "Gegeninduktionskoeffizienten", für  $i = j$  von "Selbstinduktionskoeffizienten".

*Energie eines Systems von Stromlinien.* Wenn die Leiterschleifen linienförmig (d.h. sehr geringer transversaler Ausdehnung) sind, können wir die Volumenintegrale für  $W$  und  $A$  zu Linienintegralen reduzieren. Mit der gleichen Rechnung wie in Bsp. 2.3.1 finden wir

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \int_{\gamma_i} \sum_k A_k dx^k,$$

$$A_k(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_j I_j \int_{\gamma_j} \frac{dx_k}{r_p}.$$

Einsetzen des zweiten Integrals in das erste ergibt  $W = \frac{1}{2} \sum L_{ij} I_i I_j$  mit

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{\gamma_i} dx'_k \int_{\gamma_j} dx^k ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{-1/2}.$$

Zur weiteren Vereinfachung dieses Ergebnisses parametrisieren wir die Schleifen durch  $s \in [0, 1] \mapsto \gamma_i(s)$  und  $t \in [0, 1] \mapsto \gamma_j(t)$  und holen die 1-Formen  $dx^k$  nach  $[0, 1]$  zurück. Dann entsteht

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\langle \gamma'_i(s), \gamma'_j(t) \rangle}{|\gamma_i(s) - \gamma_j(t)|} dt ds ,$$

wobei  $\gamma'_i(s)$  den Tangentialvektor  $(d/ds)\gamma_i(s)$  bezeichnet und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Skalarprodukt des Euklidischen Vektorraumes von  $E_3$  ist. (Achtung! Die Selbstinduktionskoeffizienten  $L_{ii}$  sind in dieser Näherung divergent. Für sie ist die endliche transversale Ausdehnung der Leiterschleifen zu berücksichtigen.)

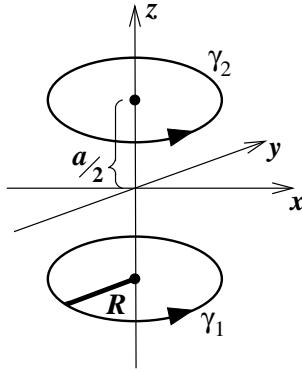


Abbildung 2.9.

*Beispiel 2.5.1.* Gegeben seien zwei kreisförmige Leiterschleifen (Abb. 2.9) mit Parametrisierung

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &= o + e_x R \cos(s) + e_y R \sin(s) - e_z a/2 , \\ \gamma_2(t) &= o + e_x R \cos(t) + e_y R \sin(t) + e_z a/2 . \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen zwei Punkten auf den Schleifen und das Skalarprodukt der zugehörigen Tangentenvektoren berechnen sich zu

$$\begin{aligned} |\gamma_1(s) - \gamma_2(t)| &= \sqrt{2R^2(1 - \cos(s - t)) + a^2} , \\ \langle \gamma'_1(s), \gamma'_2(t) \rangle &= R^2 \cos(s - t) . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für den Gegeninduktionskoeffizienten

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(s - t)}{\sqrt{2R^2(1 - \cos(s - t)) + a^2}} dt ds \\ &= \frac{\mu_0 R}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{\sqrt{1 - \cos t + a^2/2R^2}} . \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist wieder mal ein elliptisches Integral, das nicht elementar berechnet werden kann. Im Grenzfall  $a \gg R$  gilt in führender Näherung

$$L_{12} \simeq \frac{\pi\mu_0}{2} \times \frac{R^4}{a^3}.$$

Wer dies nicht auf einen Blick sieht, macht wenigstens einen Dimensionstest. Mit  $[\mu_0] = \text{Energie}/(\text{Strom}^2 \times \text{Länge})$  ergibt sich  $[L_{12}] = \text{Energie}/\text{Strom}^2$ , wie es per Definition der Induktionskoeffizienten sein muß.

## 2.6 Elektromagnetostatik mit Stromformen

Hier wird das Rechnen mit Distributionen und Stromformen weiterführend als bisher illustriert und eingeübt.

*Elektrische Dipolschicht.*  $\rho =$  Ladungsdichte einer Dipolschicht  $\sigma$  (einer Stromform  $\rho \in \Lambda_3(E_3)$ )

Abbildung zeigt  $\sigma$  im Querschnitt; Ladung  $\sim 1/\epsilon$ , Abstand der Schichten  $\sim \epsilon$ . (Für später:  $\partial\sigma = \gamma$ )

Formale Definition:

$$\rho[f] := -Q \int_{\sigma} \star df,$$

wobei  $Q = \text{Dipolmoment}/\text{Flächeneinheit}$  im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  festgehalten wird (beachte:  $[Q] = \text{Ladung} / \text{Länge}$ ).

Potential (Lösung der Poisson-Gleichung):

$$\Phi(p) = \rho \left[ \frac{1}{r_p} \right] / 4\pi\epsilon_0 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sigma} \star d \left( \frac{1}{r_p} \right).$$

Ein anderer, komplizierterer Lösungsweg wäre (um das Rechnen mit Stromformen zu üben!): wähle eine spezielle Lösung der Gleichung  $dD = \rho$ , zum Beispiel:  $D^{(0)} = Q \star \sigma$ . (physikalische Bedeutung: (infinitesimale) elektrische Flußlinien, die eine Seite der Dipolschicht mit der anderen verbinden).

Abbildung

Verifikation (hier wird das Rechnen geübt):

$$dD^{(0)}[f] = -D^{(0)}[df] = -Q \star \sigma[df] = -Q \sigma[\star df] = -Q \int_{\sigma} \star df = \rho[f].$$

Allgemeine Lösung:  $D = D^{(0)} + d\alpha$ ;

Aus  $dE = 0$  folgt  $0 = d \star D = Q d\sigma + d \star d\alpha$  oder  $d \star d\alpha = +Q\gamma$ , wenn  $\gamma = \partial\sigma = -d\sigma$  der Rand der Fläche ist.

In der ‘‘Coulomb-Eichung’’  $d \star \alpha = 0$  erhalten wir dann  $\Delta\alpha = -Q \star \gamma$  usw. usw.

Interessante Schlußfolgerung:  $d\alpha$ , und damit letztlich auch das elektrische Feld, hängt nur vom **Rand** der Fläche  $\gamma = \partial\sigma$  ab. Ist anschaulich klar (Dipolschicht!) und hätte sich auch rechnerisch sofort sehen lassen:

$$\Phi(p) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sigma} \star d\left(\frac{1}{r_p}\right) = \dots = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sigma} \tau_p.$$

Das Integral über den Raumwinkel hängt offensichtlich nur vom Rand der Fläche  $\sigma$  ab.

*Magnetisches Skalarpotential einer Stromschleife.* Kurz an Rechnung mit Vektorpotential  $A$  erinnern. Es geht aber auch anders (siehe Elektrostatik oben)...

$j$  = Stromdichte einer Leiterschleife (eine Stromform  $j \in \Lambda_2(E_3)$ )

per Definition:  $j[A] = I \int_{\gamma} A$

Abbildung (zeigt eine Fläche  $\sigma$ , deren Rand gleich  $\gamma$  ist).

Ampèresches Gesetz  $dH = j$  hat die spezielle Lösung  $H^{(0)} = I\sigma$ .  
(Verifikation:  $dH^{(0)} = \partial H^{(0)} = I\partial\sigma = I\gamma = j$ .)

allgemeine Lösung:  $H = H^{(0)} + d\Psi$ .

Aus  $dB = 0$  folgt  $0 = d\star H = d\star H^{(0)} + d\star d\Psi = Id\star\sigma + \star\Delta\Psi$

oder  $\Delta\Psi = -I\star d\star\sigma$ .

Beachte die starke Analogie zur Elektrostatik:  $d\star\sigma$  entspricht der Ladungsdichte einer elektrischen Dipolschicht (siehe oben)...

Die Lösung dieser Poisson-Gleichung können wir sofort angeben:

$$4\pi\Psi(p)/I = d\star\sigma \left[\frac{1}{r_p}\right] = -\star\sigma \left[d\frac{1}{r_p}\right] = \dots = \int_{\sigma} \tau_p.$$

$\Psi$  springt über die Fläche  $\sigma$  hinweg; die Kombination  $H^{(0)} + d\Psi$  ist stetig.

Korollar 1: perfekte Analogie zwischen dem elektrischen Feld einer Dipolschicht und dem Magnetfeld einer stromführenden Schleife.

Korollar 2: Schleife schrumpfen lassen  $\rightarrow$  das Feld von elektrischem und magnetischem Dipol sind (abgesehen von den Vorfaktoren) identisch. (Überprüfung für  $\sigma =$  Kreisscheibe)

Zusammenfassung: mögliche Strategien.

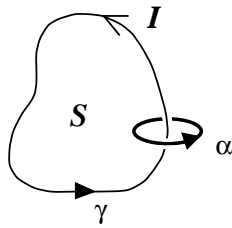
1. Die homogene Gleichung  $dB = 0$  oder  $dE = 0$  durch die Einführung eines Potentials  $B = dA$  oder  $E = -d\Phi$  lösen. Mit Materialgleichung  $H$  oder  $D$  ausdrücken und damit in die inhomogene Gleichung  $dH = j$  oder  $dD = \rho$  gehen. Es resultiert Poisson-Gleichung für  $A$  bzw.  $\Phi$  (im ersten Fall ist die Coulomb-Eichung zu wählen).

2. Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ansetzen. Durch Hinzufügen einer exakten Stromform die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ausdrücken. Damit (und mit Materialgleichung) in die homogene Gleichung gehen...

Haben wir zuviel versprochen, als wir sagten, wir könnten Elektrostatik und Magnetostatik in einheitlicher Weise behandeln. Nein. Der Kalkül mit Differentialformen oder Stromformen macht's möglich!

*Magnetisches Skalarpotential einer Leiterschleife.* Es folgt jetzt noch die alte, umständliche Rechnung. Vielleicht läßt noch die eine oder andere Redewendung wiederverwenden. Wir greifen das Problem der stromführenden Leiterschleife ein letztes Mal auf und behandeln es jetzt mit einer amüsanten Methode, die auf Ampère zurückgeht. Wie zuvor folge die Leiterschleife dem Weg  $\gamma$  und trage den Strom  $I$ . Nach dem Ampère-Gesetz gilt  $dH = 0$  auf dem stromfreien Gebiet  $V := E_3 \setminus \gamma$ . Nun würde man gerne das Poincarèsche Lemma anwenden und ein Potential für  $H$  einführen. Das ist aber nicht ohne weiteres möglich, da  $V$  nichtkontraktible Schleifen zuläßt (z.B. die Schleife  $\alpha$  in Abb. 2.10). In der Tat ergäbe  $H = d\Psi$  wegen  $\partial\alpha = 0$  eine verschwindende magnetische Ringspannung  $\int_\alpha H = \int_\alpha d\Psi = \int_{\partial\alpha} \Psi = 0$ , was ein Fehlschluß ist. Das richtige, aus dem Ampèreschen Gesetz in integraler Form ( $\int_{\partial\Sigma} H = \int_\Sigma j$ ) resultierende Ergebnis ist

$$\int_\alpha H = I \neq 0.$$



**Abbildung 2.10.** Wie durch die nichtkontraktible Schleife  $\alpha$  demonstriert wird, ist das Gebiet  $E_3 \setminus \gamma$  nicht einfach zusammenhängend. Wir sehen hier die Trennfläche  $S = S_+$  von "vorn".

Die Problematik der Nichtexaktheit von  $H$  läßt sich durch einen Trick umgehen: wir schneiden  $V$  ganz einfach längs irgendeiner Fläche  $S$ , die von  $\gamma$  berandet wird ( $\partial S = \gamma$ ), auf! Um das Argument möglichst klar herauszuarbeiten, erweitern wir  $S$  zu einer sehr dünnen Schicht  $U_S$  ( $S \subset U_S$ ) und setzen  $V' := E_3 \setminus U_S$ . Das modifizierte Gebiet  $V'$  hat den Rand  $\partial V' = S_- - S_+$ , wobei  $S_-$  im Limes infinitesimaler Schichtdicke gegen  $S$  konvergiert und  $S_+$  gegen  $-S$ . Wir nennen  $S_+$  die vordere und  $S_-$  die hintere Seite der Trennschicht. Das Gebiet  $V'$  ist per Konstruktion einfach zusammenhängend, und nach Poincaré folgt jetzt, daß die auf  $V'$  geschlossene 1-Form  $H$  dort auch exakt ist:  $H = d\Psi$ . Die Funktion  $\Psi$  heißt ein *skalares magnetisches Potential* von  $H$ . Auf dem stromfreien Gebiet  $V'$  genügt  $\Psi$  der Laplace-Gleichung  $\Delta\Psi = 0$ , denn

$$\star\Delta\Psi = d\star d\Psi = d\star H = \mu_0^{-1}dB = 0.$$

Daß  $\Psi$  nicht global existiert, macht sich in einer Diskontinuität an der Trennfläche  $S$  bemerkbar:

$$I = \int_\alpha H = \int_{\alpha \setminus (U_S \cap \alpha)} d\Psi = \Psi_- - \Psi_+,$$

wobei  $\Psi_-$  und  $\Psi_+$  den Grenzwert von  $\Psi$  bei Annäherung an  $S$  von hinten ( $S_-$ ) bzw. vorn ( $S_+$ ) bezeichnen. Das skalare magnetische Potential springt also über  $S$  hinweg um einen Betrag, der durch den Strom  $I$  gegeben ist. Diese Tatsache in Verbindung mit der Laplace-Gleichung  $\Delta\Psi = 0$  auf  $V'$  erlaubt es,  $\Psi(p)$  auf geometrische Weise auszudrücken. Es sei dazu  $B_\epsilon(p)$  der Ball mit Mittelpunkt  $p$  und Radius  $\epsilon$ . Wir schneiden  $B_\epsilon(p)$  aus  $V'$  heraus und wenden auf das verbleibende Gebiet  $U := V' \setminus B_\epsilon(p)$  die zweite Greensche Identität mit  $f := \Psi$  und  $g := 1/r_p$  an:

$$\int_{\partial U} \left( \frac{1}{r_p} \star d\Psi - \Psi \star d\frac{1}{r_p} \right) = 0 .$$

Die rechte Seite verschwindet wegen  $\Delta f = 0$  und  $\Delta g = 0$  auf  $U$ . Die 2-Form  $-\star d(1/r_p)$  ist mit der auf den Punkt  $p$  bezogenen Raumwinkelform  $\tau_p$  identisch:

$$-\star d\frac{1}{r_p} = \star \frac{dr_p}{r_p^2} = \tau_p .$$

(Achtung! Das Subskript  $p$  in  $\tau_p$  ist hier kein Auswertungspunkt wie in unserer Notation für Differentialformen sonst üblich, sondern lediglich ein externer Parameter, der verschiedene Differentialformen unterscheidet. Eine präzisere, aber umständlichere Notation wäre  $\tau^{(p)}$ .) Der Rand von  $U$  besteht aus drei Stücken,  $\partial U = S_- - S_+ - \partial B_\epsilon(p)$ , so daß folgt:

$$\int_{\partial B_\epsilon(p)} (r_p^{-1} \star d\Psi + \Psi \tau_p) = \int_{S_- - S_+} (r_p^{-1} \star d\Psi + \Psi \tau_p) .$$

Da die Oberfläche des  $\epsilon$ -Balles wie  $\epsilon^2$  skaliert,  $r_p^{-1}|_{\partial B_\epsilon(p)}$  aber nur wie  $\epsilon^{-1}$  divergiert, trägt zum Integral über  $\partial B_\epsilon(p)$  im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  nur der zweite Term bei:

$$\int_{\partial B_\epsilon(p)} (r_p^{-1} \star d\Psi + \Psi \tau_p) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Psi(p) \int_{\partial B_\epsilon(p)} \tau_p = 4\pi \Psi(p) .$$

Wegen der Stetigkeit von  $d\Psi = H$  fällt der erste Term auch im Integral über den zweiseitigen Rand  $S_- - S_+$  der Trennschicht weg, und die Diskontinuität des zweiten Terms ( $\Psi_- - \Psi_+ = I$ ) gibt

$$\int_{S_- - S_+} (r_p^{-1} \star d\Psi + \Psi \tau_p) = \int_S (\Psi_- - \Psi_+) \tau_p = I \int_S \tau_p .$$

Insgesamt folgt das hübsche Ergebnis

$$\Psi(p) = \frac{I}{4\pi} \int_S \tau_p .$$

Das skalare magnetische Potential im Punkt  $p$  ist also gleich  $I/4\pi$  mal dem Raumwinkel, unter dem die Leiterschleife von  $p$  aus gesehen wird. Daß das Integral  $\int_S \tau_p$  von der Wahl der Trennfläche  $S$  nicht abhängt, ist anschaulich klar. Formal folgt die Unabhängigkeit aus der Geschlossenheit von  $\tau_p$

( $d\tau_p = 0$  auf  $E_3 \setminus \{p\}$ ). In der Tat läßt sich für zwei Flächen  $S_1$  und  $S_2$  mit gleichem Rand  $\partial S_1 = \partial S_2 = \gamma$  die Differenz  $S_1 - S_2$  als der Rand eines dreidimensionalen Gebiets  $W$  auffassen, und es gilt

$$\int_{S_1} \tau_p - \int_{S_2} \tau_p = \int_{S_1 - S_2} \tau_p = \int_{\partial W} \tau_p = \int_W d\tau_p = 0,$$

d.h. das Integral  $\int_{S_1} \tau_p = \int_{S_2} \tau_p$  hängt wirklich nur von der berandenden Schleife  $\partial S = \gamma$  ab und nicht von  $S$  selbst. Wir können diese Unabhängigkeit formelmäßig explizit machen, indem wir lokal  $\tau_p = d\sigma_p$  setzen [z.B. mit  $\sigma_p = (1 - \cos \theta_p) d\varphi_p$ , wobei  $\theta_p$  und  $\varphi_p$  der Polar- bzw. Azimutwinkel bzgl.  $p$  sind] und mit dem Stokesschen Satz das Flächenintegral über  $S$  in ein Linienintegral längs  $\gamma$  umwandeln:

$$\Psi(p) = \frac{I}{4\pi} \int_{\gamma} \sigma_p.$$

*Aufgabe 2.6.1.* Berechne für die in Abb. 2.11 gezeigte Anordnung das skalare magnetische Potential  $\Psi$  und die magnetische Erregung  $H$  auf der  $z$ -Achse, und verifiziere die Übereinstimmung des Resultats mit dem von Bsp. 2.2.2.

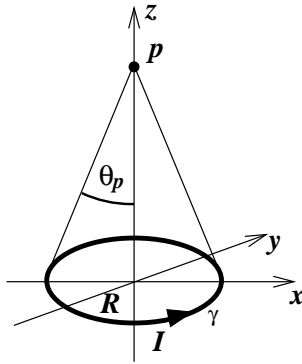


Abbildung 2.11. Skizze zu Aufg. 2.6.1



### 3. Netzwerke

Warnung: das folgende Kapitel ist noch in einem didaktisch sehr schlechten Zustand und findet bei den Studenten keine große Resonanz. (Vielleicht sollte man das Kapitel deshalb ganz weglassen. Andererseits ist es aber für numerische Zwecke schon sehr wichtig zu verstehen, wie man die Maxwell'sche Theorie richtig diskretisiert.)

In diesem Kapitel werden wir die Maxwell'sche Theorie diskretisieren. Die Motivation hierfür ist zweifach:

1. Diskretisierung ist eine Vorbereitung für die Anwendung numerischer Methoden in Situationen, wo analytische Lösungsmethoden versagen.
2. Die diskrete Formulierung wird unser Verständnis der Theorie vertiefen und unsere Anschauung verbessern. Insbesondere werden wir das "Flußlinienbild" präzisieren.

Abschnitt 1.1 dient u.a. dazu, einige allgemeine Strukturen einzuführen, mit denen wir dann auf Netzwerken arbeiten werden.

#### 3.1 k-Komplexe

Wir betrachten eine Gesamtheit, die aus einer Menge von

Punkten	$\Sigma_0 = \{p_1 p_2 p_3 \dots\},$
orientierten Linien	$\Sigma_1 = \{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots\},$
orientierten Flächen	$\Sigma_2 = \{S_1 S_2 S_3 \dots\},$
und orientierten Gebieten	$\Sigma_3 = \{V_1 V_2 V_3 \dots\},$

besteht plus einer Vorschrift  $\partial$  ("Randoperator"), die jeder/m

$\begin{pmatrix} \text{Linie} \\ \text{Fläche} \\ \text{Gebiet} \end{pmatrix}$  die sie/es berandenden  $\begin{pmatrix} \text{Punkte} \\ \text{Linien} \\ \text{Flächen} \end{pmatrix}$  zuweist.

*Beispiel 3.1.1.* Tetraeder

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{p_1 p_2 p_3 p_4\} \\ \Sigma_1 &= \{\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14}, \gamma_{23}, \gamma_{24}, \gamma_{34}\} & \partial \gamma_{ij} &= p_j - p_i \\ \Sigma_2 &= \{S_{123}, S_{124}, S_{134}, S_{234}\} & \partial S_{ijk} &= \gamma_{jk} - \gamma_{ik} + \gamma_{ij} \\ \Sigma_3 &= \text{Tetraeder} = V_{1234} & \partial V_{1234} &= S_{234} - S_{134} + S_{124} - S_{123} \blacksquare \end{aligned}$$

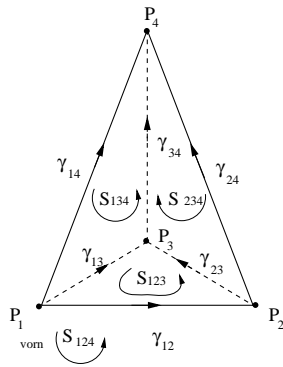


Abbildung 3.1. Tetraeder

Beispiel 3.1.2. Quader

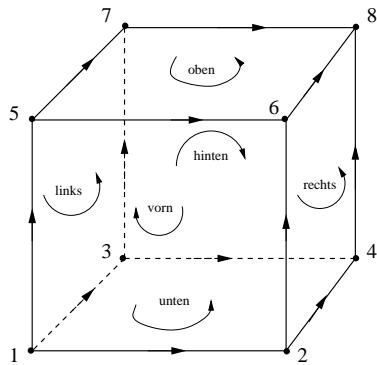


Abbildung 3.2. Quader

$$\begin{aligned}
 \Sigma_0 &= \{p_1 p_2 \dots p_8\} & \partial \gamma_{ij} &= p_j - p_i \\
 \Sigma_1 &= \{\gamma_{12} \dots \gamma_{78}\} & \partial S_{\text{rechts}} &= \gamma_{24} + \gamma_{48} - \gamma_{68} - \gamma_{26} \\
 \Sigma_2 &= \{S_{\text{oben}}, S_{\text{unten}} \dots\} & \partial Q &= S_{\text{rechts}} - S_{\text{links}} + S_{\text{oben}} - S_{\text{unten}} \\
 \Sigma_3 &= \{Q\}, Q = \text{Quader} & & + S_{\text{hinten}} - S_{\text{vorn}} \blacksquare
 \end{aligned}$$

Die Elemente von  $\Sigma_k$  spannen einen linearen Raum auf, den wir mit  $C_k$  bezeichnen. (In den Beispielen:  $p_2 - p_1 \in C_0$ ,  $\gamma_{12} + 2\gamma_{24} - \frac{4}{3}\gamma_{13} \in C_1$ .) Die Elemente von  $C_k$  heißen  $k$ -Ketten. Die Elemente von  $\sum_k$  heißen *Basis-k-Ketten* oder, kürzer,  $k$ -Zellen. Die Gesamtheit der Räume  $C_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) zusammen mit dem Randoperator  $C_3 \xrightarrow{\partial} C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0$  heißt  $\mathfrak{B}$ -Komplex.

(Verallgemeinerung zu  $k$ -Komplexen ist klar.)

Wir betrachten jetzt den zu  $C_k$  dualen Raum  $C_k^* = C^k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ).

Zur Erinnerung: "dual" heißt, daß  $C^k$  der lineare Raum ist, der aus den linearen Funktionen  $\omega : C_k \rightarrow \mathbb{R}$  besteht.

Die Elemente von  $C^k$  heißen  $k$ -Coketten. Durch Anwendung einer  $k$ -Cokette  $\omega$  auf eine  $k$ -Kette  $c$  entsteht eine reelle Zahl, die wir mit  $\omega(c)$  bezeichnen.

Es liegt nahe, diese Anwendung mit "Integrieren" gleichzusetzen:  $\omega(c) \equiv \int_c \omega$ . Mit dieser Identifikation sind  $k$ -Coketten das diskrete Analogon zu  $k$ -Formen.

Wir notieren die Dualbasis mit hochgestellten Indizes, d.h.  $p^i(p_j) = \delta_j^i$ ,  $\gamma^i(\gamma_j) = \delta_j^i$  usw. Dann ist also  $f = p^i$  jene Funktion (= Null-Form), die überall verschwindet außer im Punkt  $p = p_i$ , wo sie den Wert  $f(p) = 1$  hat. Genauso können wir  $\omega = \gamma^i$  als die 1-Form auffassen, deren Integral längs jeder 1-Zelle (d.h. jeder elementaren Linie) verschwindet außer längs  $c = \gamma_i$ , wo gilt  $\omega(c) = \int_c \omega = 1$ . ■

Der zum Randoperator  $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$  duale Operator  $d : C^{k-1} \rightarrow C^k$  heißt *Corandoperator*. Für  $\eta^* \in C^{k-1}$  und  $c \in C_k$  gilt per Definition von  $d$  als dem zu  $\partial$  dualen Operator:

$$\boxed{(d\eta^*)(c) = \eta^*(\partial c)} . \quad (3.1)$$

Mit den Identifikationen  $\omega \equiv \eta^*$ ,  $\eta^*(\partial c) = \int_{\partial c} \omega$  und  $(d\eta^*)(c) = \int_c d\omega$  schreibt sich (3.1) wie folgt:

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega ,$$

d.h. der *Corandoperator* ist das diskrete Analogon zur äußeren Ableitung – was seine Bezeichnung mit  $d$  erklärt –, und (3.1) ist die diskrete Version des Stokesschen Satzes.

Wie im Kontinuum ist  $d$  auch auf einem  $k$ -Komplex genau so definiert, daß der Stokessche Satz gilt. ■

*Beispiel 3.1.1 : Tetraeder*

$$(1) \quad dP^i = \sum_{n < i} \gamma^{ni} - \sum_{i < n} \gamma^{in}$$

$$(2) \quad d\gamma^{ij} = \sum_{n < i < j} S^{nij} - \sum_{i < n < j} S^{inj} + \sum_{i < j < n} S^{ijn}$$

(Es wird jeweils nur über  $n$  summiert.)

$$(3) \quad dS^{234} = V^{1234}, \quad dS^{134} = -V^{1234} \quad \text{usw.}$$

*Beweis z.B. von (1):*

$$\begin{aligned} (dp^i)(c) &= p^i(\partial c) = p^i\left(\partial \sum_{m < n} c^{mn} \gamma_{mn}\right) \\ &= p^i\left(\sum_{m < n} c^{mn} (p_n - p_m)\right) = \sum_{m < i} c^{mi} - \sum_{i < n} c^{in} \\ &= \left(\sum_{n < i} \gamma^{ni} - \sum_{i < n} \gamma^{in}\right) \underbrace{\left(\sum_{k < l} c^{kl} \gamma_{kl}\right)}_{=c} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

*Beispiel 3.1.2 : Quader*

$$\begin{aligned} dp^1 &= -\gamma^{12} - \gamma^{13} - \gamma^{15} \\ dp^4 &= \gamma^{24} + \gamma^{34} - \gamma^{48} \quad \text{usw.} \\ d\gamma^{37} &= +S^{\text{hinten}} + S^{\text{links}} \\ d\gamma^{68} &= +S^{\text{oben}} - S^{\text{rechts}} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Die *allgemeine Rechenregel* für  $d$  lautet wie folgt: (Sie ergibt sich direkt aus der Definition und läßt sich leicht merken, da der *Co*-operator die diskrete Version der äußeren Ableitung ist):

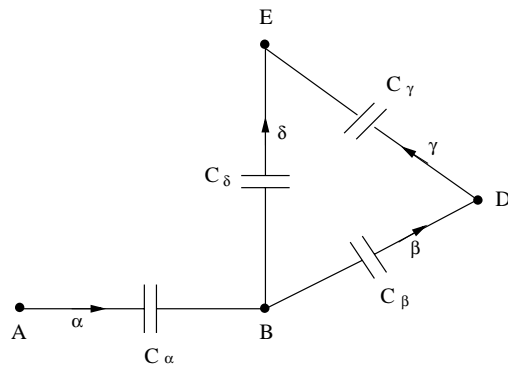
Sei  $c_i$  eine  $k$ -Zelle. Zur Berechnung von  $dc^i$  sehen wir nach, welche  $(k+1)$ -Zellen  $c_i$  in ihrem Rand enthalten.  $dc^i$  ist dann die "orientierte" Summe der zugehörigen  $(k+1)$ -Cozellen, wobei das Vorzeichen positiv (negativ) zu wählen ist, wenn  $c_i$  im Rand der betreffenden  $(k+1)$ -Zelle mit der richtigen (falschen) Orientierung vorkommt. ■

## 3.2 Kapazitive und resistive Netzwerke

Unser eigentliches Ziel in diesem Kapitel ist – wie gesagt – eine diskrete Formulierung der Elektrodynamik, die ihrer differentiellen Struktur gut angepaßt ist. Bevor wir uns diesem Ziel zuwenden, wollen wir den Begriff des  $k$ -Komplexes und der auf ihm definierten Operationen  $\partial$  und  $d$  an zwei Beispielen weiter erläutern und einüben.

### 3.2.1 Kapazitives Netzwerk

Wir betrachten einen 2-Komplex (am Ende wird auch ein 1-Komplex ausreichen), auf dessen 1-Zellen *Kondensatoren* plaziert sind!



**Abbildung 3.3.** Die  $C_\alpha, \dots, C_\delta$  sind die Kapazitäten der Kondensatoren.

*Beispiel 3.2.1.* Wir transferieren (mit Hilfe einer Batterie) Ladungen zwischen den Knoten (= Punkten oder 0-Zellen) des Netzwerkes (oder Komplexes). Im Gleichgewicht werden sich die Ladungen in einer bestimmten Weise

über die Kondensatoren verteilen. Ziel ist die Berechnung dieses Gleichgewichtszustandes. ■

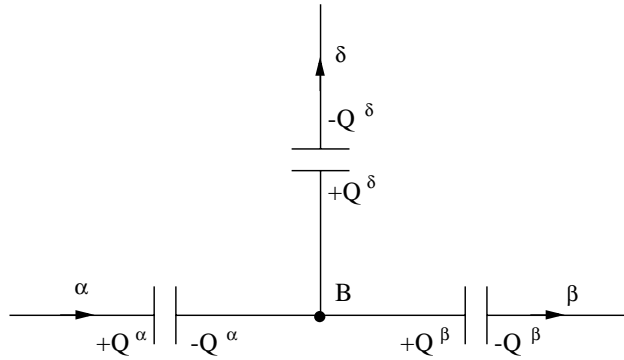
**Zuordnung** der physikalischen Größen zum Netzwerk:

- i. Die Verteilung  $\rho$  der Ladungen an den Knoten ist eine 0-Kette:  
 $\rho = \rho^A A + \rho^B B + \dots$
- ii. Die Verteilung der Ladungen über die Kondensatoren ist eine 1-Kette:  $Q = Q^\alpha \alpha + Q^\beta \beta + \dots$
- iii. Die Spannungen an dem Kondensatoren bilden eine 1-Cokette:  
 $V = V_\alpha \alpha^* + V_\beta \beta^* + \dots$   
 ( $A^*$  ist dual zu  $A$ ,  $\alpha^*$  dual zu  $\alpha$  usw.)

Die Ringspannung längs jedes geschlossenen Weges muß verschwinden  $\implies dV = 0$ .

Die Kapazitäten verknüpfen Kondensatorladungen und -Spannungen:  $Q^\alpha = C_\alpha V_\alpha$  usw. In basisfreier Notation definieren die Kapazitäten eine Abbildung  $\mathcal{C} : C^1 \rightarrow C_1$ ,  $V \rightarrow \mathcal{C}V = Q$ .

Der Definition der Kondensatorladungen liegt eine Vorzeichenkonvention zugrunde, die der Orientierung der Linien entsprechend gewählt ist. Zur Illustration greifen wir dem Knoten  $B$  im obigen Beispiel heraus:



**Abbildung 3.4.** Es muß gelten:  $\rho^B = -Q^\alpha + Q^\beta + Q^\delta$ .

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Kondensator- und Knotenladungen lautet mit Hilfe des Randoperators  $\partial$ :  $\partial Q = -\rho$ . ■

**Zusammenfassung:** die Gleichungen des kapazitiven Netzwerkes sind:

$$\boxed{\partial Q = -\rho, \quad Q = \mathcal{C}V, \quad dV = 0}$$

Beachte die starke (und auch nicht zufällige) Analogie zu dem Grundgleichungen der Elektrostatik:

$$\begin{aligned} dD &= \rho, & D &= \varepsilon_0 \star E, & dE &= 0. \\ (\partial \tilde{D} &= -\tilde{\rho}) \end{aligned}$$

Die Gleichung  $dV = 0$  wird durch  $V = -d\Phi$  gelöst und kann durch letztere ersetzt werden. (Nach dieser Ersetzung ist ein 1-Komplex für die Formulierung der Netzwerk-Gleichungen ausreichend.)

Das Potential  $\Phi = \Phi_A A^* + \Phi_B B^* + \dots$  ist eine 0-Cokette.

Die Stimmigkeit der Zuordnung der physikalischen Größen zum Netzwerk sieht man z.B. am Ausdruck für (zweimal) die Energie:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) &= \Phi_A \rho^A + \Phi_B \rho^B + \dots \\ &\quad \text{(Potential angewendet auf Knotenladungen)} \\ &= \Phi(-\partial Q) = (-d\Phi)(Q) = V(Q) \\ &\quad \text{(Spannungen angewendet auf Kondensatorladungen)} \\ &= V_\alpha Q^\alpha + V_\beta Q^\beta + \dots = C_\alpha (V_\alpha)^2 + C_\beta (V_\beta)^2 + \dots \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Für ein zusammenhängendes Netzwerk wird das Potential  $\Phi$  bis auf eine additiven Konstante durch die *Poisson-Gleichung* bestimmt:

$$-\rho = \partial Q = \partial \mathcal{C} V = -\partial \mathcal{C} d \Phi \quad \Rightarrow$$

$\Delta \Phi = -\rho$  mit dem Netzwerk-Laplaceoperator

$$\Delta = -\partial \mathcal{C} d \quad (\Delta : C^0 \rightarrow C_0) \quad \blacksquare$$

Ein einfaches *Poisson-Randwertproblem*:

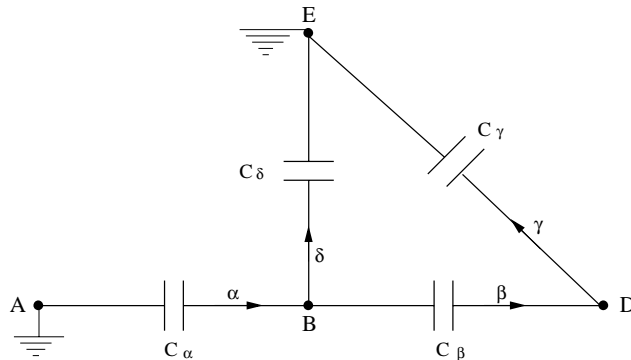


Abbildung 3.5.

Die "Randknoten"  $A$  und  $E$  seien *geerdet*. (d.h.  $\Phi_A = \Phi_E = 0$ .) Die Ladungen auf den "inneren Knoten"  $B$  und  $D$  sind vorgegeben:  $\rho|_{\text{innen}} = B\rho^B + D\rho^D$ . Zu berechnen sind die Potentiale auf den inneren Knoten und die Ladungen auf den Randknoten.  $\blacksquare$

Sei dazu  $G(\bullet, p)$  das Potential, das durch eine an einem inneren Knoten  $p$  platzierte Einheitsladung erzeugt wird, wenn die Randknoten geerdet sind.  $G$  ist die Greensche Funktion des Netzwerks mit Randknoten.  $G$  genügt den Gleichungen:

$$(1) \quad -\Delta G(\bullet, p) \Big|_{\text{innen}} = p \quad (p = \text{innerer Knoten})$$

$$(2) \quad G(\bullet, p) \Big|_{\text{Rand}} = 0 \quad \blacksquare$$

Die Lösung der gestellten Aufgabe läßt sich durch die Greensche Funktion ausdrücken:

$$(i) \quad \Phi = \sum_{p \text{ innen}} G(\bullet, p) \rho^p,$$

$$(ii) \quad \rho \Big|_{\text{Rand}} = - \sum_{p \text{ innen}} \Delta G(\bullet, p) \Big|_{\text{Rand}} \rho^p \quad \blacksquare$$

(Begründung: Per Definition von  $G$  erfüllt das in (i) angegebene  $\Phi$  die Randbedingung  $\Phi \Big|_{\text{Rand}} = 0$  und genügt der Poisson-Gleichung  $-\Delta \Phi \Big|_{\text{innen}} = \rho \Big|_{\text{innen}}$ . Gleichung (ii) folgt aus:  $-\Delta \Phi = \rho \Rightarrow \rho \Big|_{\text{Rand}} = -\Delta \Phi \Big|_{\text{Rand}}$  und (i).)

Zur Berechnung von  $G$  benötigen wir den Laplaceoperator  $\Delta = -\partial \mathcal{C}$  d des Netzwerkes, den wir folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{aligned} \Phi &:= B^* \Phi_B + D^* \Phi_D \Rightarrow \\ d\Phi &= (\alpha^* - \beta^* - \delta^*) \Phi_B + (\beta^* - \gamma^*) \Phi_D \Rightarrow \\ \varphi d\Phi &= (\alpha C_\alpha - \beta C_\beta - \delta C_\delta) \Phi_B + (\beta C_\beta - \gamma C_\gamma) \Phi_D \Rightarrow \\ \partial \varphi d\Phi &= ((B - A)C_\alpha - (D - B)C_\beta - (E - B)C_\delta) \Phi_B \\ &\quad + ((D - B)C_\beta - (E - D)C_\gamma) \Phi_D \Rightarrow \\ (-\Delta \Phi) \Big|_{\text{innen}} &= B((C_\alpha + C_\beta + C_\delta) \Phi_B - C_\beta \Phi_D) \\ &\quad + D(-C_\beta \Phi_B + (C_\beta + C_\gamma) \Phi_D) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Folglich genügt die Greensche Funktion  $G$  der Gleichung

$$\begin{aligned} (-\Delta G)(\bullet, p) \Big|_{\text{innen}} &= B((C_\alpha + C_\beta + C_\delta)G(B, p) - C_\beta G(D, p)) \\ &\quad + D(-C_\beta G(B, p) + (C_\beta + C_\gamma)G(D, p)) = p \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Übergang zu Matrixdarstellung:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} C_\alpha + C_\beta + C_\delta & -C_\beta \\ -C_\beta & C_\beta + C_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(B, B) & G(B, D) \\ G(D, B) & G(D, D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} G(B, B) &= (C_\beta + C_\gamma)/Z, & G(B, D) &= C_\beta/Z \\ G(D, B) &= C_\beta/Z, & G(D, D) &= (C_\alpha + C_\beta + C_\gamma)/Z \end{aligned}$$

mit  $Z = (C_\alpha + C_\beta + C_\delta)(C_\beta + C_\gamma) - C_\beta^2$ .

Gleichung (i)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Phi_B &= G(B, B) \rho^B + G(B, D) \rho^D, \\ \Phi_D &= G(D, B) \rho^B + G(D, D) \rho^D. \end{aligned}$$

Sei speziell  $C_\alpha = C_\beta = C_\gamma = C_\delta = C$  (um einfache Ausdrücke zu bekommen). Dann folgt

$$\begin{aligned}\Phi_B &= (2\rho^B + \rho^D)/5C \\ \Phi_D &= (\rho^B + 3\rho^D)/5C\end{aligned}$$

*Aufgabe:* Berechne  $\rho^A$  und  $\rho^E$  aus Gleichung (ii) ■

### 3.2.2 Resistive Netzwerke

Wir betrachten wiederum einen 2-Komplex. Die Zahl der 1-Zellen auf dem 2-Komplex sei mit  $N$  bezeichnet. Auf  $N-1$  dieser 1-Zellen seien *Widerstände* platziert und auf der verbleibenden eine Stromquelle (eine Batterie mit Spannung  $V_{\text{batt}}$ ). Alles sei durch die Knoten leitend verbunden.

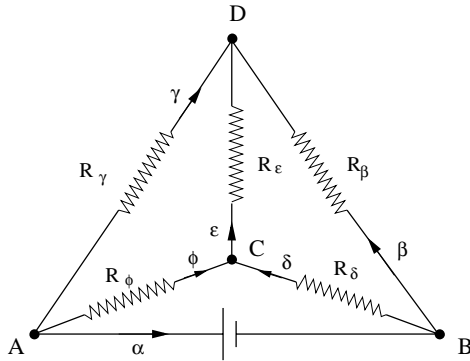


Abbildung 3.6.

Im stationären Zustand fließt in jedem Leiterstück (= 1-Zelle) ein bestimmter Strom. Diese Ströme gilt es aus der Batteriespannung und den als bekannt vorausgesetzten Widerständen zu berechnen.

*Zuordnung* der physikalischen Größen zum Netzwerk: Die an den Widerständen (und an der Batterie) abfallenden Spannungen bilden eine 1-Cokette  $V = V_\alpha \alpha^* + V_\beta \beta^* + \dots$  ( $V_\alpha = V_{\text{batt}}$  im Beispiel), die Potentiale an den Knoten eine 0-Cokette  $\Phi = \Phi_A A^* + \Phi_B B^* + \dots$

Die Ströme bestimmen eine 1-Kette  $I = I_\alpha \alpha + I_\beta \beta + \dots$  ( $I_\alpha = I_{\text{batt}}$  im Beispiel).

Resistive Netzwerke wurden erstmals von Kirchhoff ( $\sim 1845$ ) systematisch untersucht.

- i. 1. Kirchhoffsches Gesetz:  $\partial I = 0$ .

Dieses Gesetz drückt die Stromerhaltung an den Knoten aus: alles was an Strom in einen Knoten hineinfließt, muß im stationären Zustand auch wieder herausfließen. (Andernfalls würde sich ja im Knoten Ladung ansammeln und wir hätten keinen stationären Zustand.)  $\partial I = 0$  ist die diskrete Version der Gleichung  $\text{dj} = 0$ . (Gemäß den Überlegungen von Abschnitt ?? ent-



spricht die Stromdichte-2-Form  $j$  einer 1-Kette,  $I$ .) Im Beispiel ist  $(\partial I)_C = I_\delta - I_\varepsilon + I_\varphi = 0$ . ■

- ii. 2.Kirchhoffsches Gesetz:  $dV = 0$ .
- iii. Ohmsches Gesetz:  $V^i = R_i I_i$  ( $i \neq$  Batterie).

Diese Gleichung gilt für alle mit Widerständen besetzten 1-Zellen. Der Strom  $I_{\text{batt}}$  durch die 1-Zelle mit Batterie wird durch  $V_{\text{batt}}$  und den (zu berechnenden) *Gesamtwiderstand* des Netzwerks bestimmt.

Basisfreie Schreibweise des Omschen Gesetzes:  $V = RI$ .

**Zusammenfassung:** die Gesetze eines resistiven Netzwerkes sind

$$\partial I = 0, \quad V = RI, \quad dV = 0 \quad \blacksquare$$

Zwei Lösungsmethoden bieten sich an:

1. Methode ("Knotenpotentialmethode"):
  - i. Löse  $dV = 0$  durch den Ansatz:  $V = -d\Phi$ .
  - ii. Drücke  $I$  durch  $\Phi$  aus:  $I = -R^{-1}d\Phi$ .
  - iii. Bestimme  $\Phi$  aus den Gleichungen  $\partial I = -\partial R^{-1}d\Phi = 0$ .
2. Methode ("Schleifenstrommethode"):
  - i. Löse  $\partial I = 0$  durch den Ansatz:  $I = \partial Z$ .  
(mit  $Z$  einer 2-Kette)
  - ii. Drücke  $V$  durch  $Z$  aus:  $V = R\partial Z$ .
  - iii. Bestimme  $Z$  aus den Gleichungen  $dV = dR\partial Z = 0$ .

Man kann zeigen, daß beide Methoden immer funktionieren, d.h. zum Ziel führen. (Beweis im Buch von Bamberg und Sternberg.) Hier begnügen wir uns mit der Illustration beider Methoden am obigen Beispiel. ■

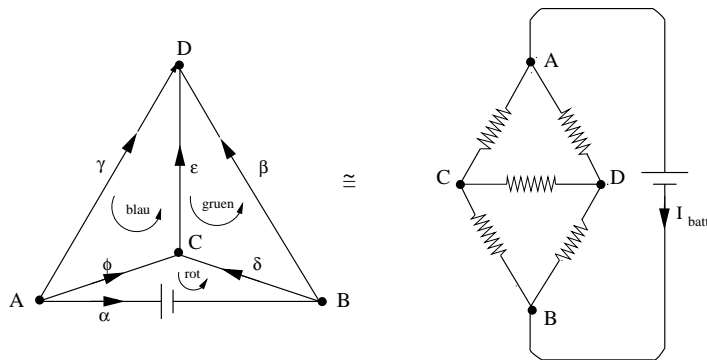


Abbildung 3.7.

## 1. Knotenpotentialmethode:

O.B.d.A. setzen wir  $\Phi_A = 0$ ,  $\Phi_B = V_{\text{batt}}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} -V &= d\Phi = d(\mathbf{B}^*V_{\text{batt}} + \mathbf{C}^*\Phi_C + \mathbf{D}^*\Phi_D) \\ &= (\alpha^* - \beta^* - \delta^*)V_{\text{batt}} + (\delta^* - \varepsilon^* + \varphi^*)\Phi_C + (\beta^* + \gamma^* + \varepsilon^*)\Phi_D. \end{aligned}$$

Es folgt:  $-I = R^{-1}d\Phi = -I_{\text{batt}}\alpha - (R_{\beta}^{-1}\beta + R_{\delta}^{-1}\delta)V_{\text{batt}} + (R_{\delta}^{-1}\delta - R_{\varepsilon}^{-1}\varepsilon + R_{\varphi}^{-1}\varphi)\Phi_C + (R_{\beta}^{-1}\beta + R_{\gamma}^{-1}\gamma + R_{\varepsilon}^{-1}\varepsilon)\Phi_D$ ; und

$$\begin{aligned} -\partial I &= I_{\text{batt}}(A - B) - (R_{\beta}^{-1}(D - B) + R_{\delta}^{-1}(C - B))V_{\text{batt}} \\ &\quad + (R_{\delta}^{-1}(C - B) - R_{\varepsilon}^{-1}(D - C) + R_{\varphi}^{-1}(C - A))\Phi_C \\ &\quad + (R_{\beta}^{-1}(D - B) + R_{\gamma}^{-1}(D - A) + R_{\varepsilon}^{-1}(D - C))\Phi_D = \\ &= A(I_{\text{batt}} - R_{\varphi}^{-1}\Phi_C - R_{\gamma}^{-1}\Phi_D) \\ &\quad + B(-I_{\text{batt}} + (R_{\beta}^{-1} + R_{\delta}^{-1})V_{\text{batt}} - R_{\delta}^{-1}\Phi_C - R_{\beta}^{-1}\Phi_D) \\ &\quad + C(-R_{\delta}^{-1}V_{\text{batt}} + (R_{\delta}^{-1} + R_{\varepsilon}^{-1} + R_{\varphi}^{-1})\Phi_C - R_{\varepsilon}^{-1}\Phi_D) \\ &\quad + D(-R_{\beta}^{-1}V_{\text{batt}} - R_{\varepsilon}^{-1}\Phi_C + (R_{\beta}^{-1} + R_{\gamma}^{-1} + R_{\varepsilon}^{-1})\Phi_D) \end{aligned}$$

Wegen  $\partial I = 0$  müssen die Koeffizienten von A, B, C, D im letzten Ausdruck verschwinden. Dies liefert vier Gleichungen. Davon sind nur drei linear unabhängig. (Ist nämlich Stromerhaltung an  $(N - 1)$  Knoten erfüllt, so ist sie am verbliebenden Knoten *automatisch* erfüllt.) Wir haben deshalb drei Gleichungen für drei Unbekannte ( $\Phi_C$ ,  $\Phi_D$  und  $I_{\text{batt}}$ ).

*Aufgabe 3.2.1.* Löse diese Gleichungen und berechne den Gesamtwiderstand  $V_{\text{batt}}/I_{\text{batt}}$ .

## 2. Schleifenstrommethode:

Wie im Diagramm bezeichnen wir die 2-Zellen des Netzwerks mit "rot", "grün" und "blau". Ansatz für die 2-Kette  $Z$ :

$$Z = \text{rot} \cdot I^{\text{rot}} + \text{grün} \cdot I^{\text{grün}} + \text{blau} \cdot I^{\text{blau}}.$$

Der Rand:  $I := \partial Z = (\alpha + \delta - \varphi)I^{\text{rot}} + (\beta - \varepsilon - \delta)I^{\text{grün}} + (\varepsilon - \gamma + \varphi)I^{\text{blau}}$ .  
Ohm:  $V = RI = R\partial Z = \alpha^*V_{\text{batt}} + \beta^*R_{\beta}I^{\text{grün}} - \gamma^*R_{\gamma}I^{\text{blau}} + \delta^*R_{\delta}(I^{\text{rot}} - I^{\text{grün}}) + \varepsilon^*R_{\varepsilon}(I^{\text{blau}} - I^{\text{grün}}) + \varphi^*R_{\varphi}(I^{\text{blau}} - I^{\text{rot}})$ ;

Es folgt

$$\begin{aligned} dV &= \text{rot}^*V_{\text{batt}} + \text{grün}^*R_{\beta}I^{\text{grün}} + \text{blau}^*R_{\gamma}I^{\text{blau}} \\ &\quad + (\text{rot}^* - \text{grün}^*)R_{\delta}(I^{\text{rot}} - I^{\text{grün}}) \\ &\quad + (\text{blau}^* - \text{grün}^*)R_{\varepsilon}(I^{\text{blau}} - I^{\text{grün}}) \\ &\quad + (\text{blau}^* - \text{rot}^*)R_{\varphi}(I^{\text{blau}} - I^{\text{rot}}). \end{aligned}$$

$dV = 0 \Rightarrow$  die Koeffizienten von  $\text{rot}^*$ ,  $\text{grün}^*$ ,  $\text{blau}^*$  müssen verschwinden, und wir erhalten wieder drei Gleichungen für drei Unbekannte ( $I^{\text{rot}}$ ,  $I^{\text{grün}}$ ,  $I^{\text{blau}}$ ):

$$\begin{aligned} \text{rot}^*: & V_{\text{batt}} + R_{\delta}(I^{\text{rot}} - I^{\text{grün}}) - R_{\varphi}(I^{\text{blau}} - I^{\text{rot}}) = 0 \\ \text{grün}^*: & R_{\beta}I^{\text{grün}} - R_{\delta}(I^{\text{rot}} - I^{\text{grün}}) - R_{\varepsilon}(I^{\text{blau}} - I^{\text{grün}}) = 0 \\ \text{blau}^*: & R_{\gamma}I^{\text{blau}} + R_{\varepsilon}(I^{\text{blau}} - I^{\text{grün}}) + R_{\varphi}(I^{\text{blau}} - I^{\text{rot}}) = 0. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} R_\delta + R_\varphi & -R_\delta & -R_\varphi \\ -R_\delta & R_\beta + R_\delta + R_\varepsilon & -R_\varepsilon \\ -R_\varphi & -R_\varepsilon & R_\gamma + R_\varepsilon + R_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{\text{rot}} \\ I^{\text{grün}} \\ I^{\text{blau}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\text{batt}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Aufgabe 3.2.2.* Löse diese Gleichungen und überprüfe die Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Knotenpotentialmethode für den Gesamtwiderstand  $(I^{\text{rot}}/V_{\text{batt}})^{-1}$  ■

### 3.3 Diskretisierung der Maxwell'schen Theorie

#### 3.3.1 Homogene Maxwell-Gleichungen

Wir überdecken den dreidimensionalen Raum (oder, je nach Aufgabenstellung, nur einen Teil davon) mit einem 3-Komplex  $K$ .

$$K : \begin{array}{ccccccc} C_3 & \xrightarrow{\partial} & C_2 & \xrightarrow{\partial} & C_1 & \xrightarrow{\partial} & C_0 \\ C^3 & \xleftarrow{d} & C^2 & \xleftarrow{d} & C^1 & \xleftarrow{d} & C^0 \end{array}$$

Wie der Komplex  $K$  im Detail aussieht, ist für das folgende ohne Bedeutung.

Zum Beispiel könnten wir den Raum mit Tetraedern ausfüllen. Der Rand eines jedem Tetraeders ist die 2-Kette, die aus den vier den Tetraeder begrenzenden Dreiecken zusammengesetzt ist. Die Orientierung der Dreiecke ist positiv (Gegenuhrzeigersinn), wenn wir von außen auf den Tetraeder blicken. (Genauer: wir sehen die Dreiecke mit der mathematisch positiven Orientierung, wenn wir von außen draufblicken.) Der Rand eines jeden Dreiecks ist die 1-Kette, die sich aus den das Dreieck begrenzenden Linien zusammensetzt. Die Orientierung der Linien folgt dem Umlaufsinn des Dreiecks. Der Rand einer jeden elementaren Linie ist die Differenz aus Endpunkt und Anfangspunkt. Es ist nicht notwendig, daß die Dreiecke eben und die Linien gerade sind, sie dürfen auch krumm sein. Die Tetraeder dürfen verschieden groß sein und verschiedene Gestalt haben, solange sie nur den Raum vollständig ausfüllen. ■

Um ein zweites Beispiel (mit mehr Regelmäßigkeit) zu nennen: der Komplex  $K$  könnte aus Würfeln gleicher Form und Größe aufgebaut sein ("kubischer Komplex"). Jeder Würfel hätte 6 quadratische Seitenflächen, die seinen Rand bilden. Der Rand jedes elementaren Quadrats bestünde aus 4 Kanten. Jede Kante wäre durch 2 Punkte berandet. ■

Wir nehmen die elektrische Feldstärke  $E$  und integrieren sie über jede der 1-Zellen  $\alpha, \beta, \dots$  von  $K$ . Mit  $V_\alpha := \int_\alpha E$  (= elektrische Spannung längs  $\alpha$ ) entsteht die 1-Cokette  $V = \alpha^* V_\alpha + \beta^* V_\beta + \dots$ . Ebenso nehmen wir die magnetische Feldstärke  $B$  und integrieren sie über jede der 2-Zellen rot, blau, grün, usw. von  $K$ . Mit  $\Phi_{\text{blau}} := \int_{\text{blau}} B$  (= magnetischer Fluß durch die 2-Zelle blau) entsteht die 2-Cokette  $\Phi^{(m)} = \text{rot}^* \Phi_{\text{rot}} + \text{blau}^* \Phi_{\text{blau}} + \dots$ . Sei nun  $c$  eine beliebige 3-Kette auf  $K$ . Aus dem Gesetz  $\int_{\partial c} B = 0$  (Quellenfreiheit der magnetischen Flußdichte) folgt dann

$$\Phi^{(m)}(\partial c) = \Phi_{\text{rot}}(\partial c)^{\text{rot}} + \Phi_{\text{blau}}(\partial c)^{\text{blau}} + \dots = 0.$$

(Anwendung der 2-Cokette  $\Phi^{(m)}$  auf die 2-Kette  $\partial c$  ergibt Null.)

Per Definition des Corandoperators  $d$  ist  $\Phi^{(m)}(\partial c) = (d\Phi^{(m)})(c)$ , und wegen der Beliebigkeit von  $c$  folgt:

$$d\Phi^{(m)} = 0.$$

(Der Corand des magnetischen Flusses verschwindet.)

Sei  $c$  nun eine beliebige 2-Kette auf  $K$ . Aus dem Faradayschen Induktionsgesetz in integraler Form ( $-\frac{\partial}{\partial t} \int_c B = \int_{\partial c} E$ ) folgt:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Phi^{(m)}(c) = V(\partial c) = (dV)(c),$$

oder:  $-\dot{\Phi}^{(m)} = dV$ . (Der *Corand* der elektrischen Spannung ist gleich minus der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses.)

**Zusammenfassung:** die homogenen Maxwell-Gleichungen in integraler Form lauten auf einem 3-Komplex  $K$ :

$$\boxed{d\Phi^{(m)} = 0, \quad dV = -\dot{\Phi}^{(m)}}$$

### 3.3.2 Inhomogene Maxwell-Gleichungen

Das Vorgehen ist ganz ähnlich wie für die homogenen Gleichungen. Wir führen einen zweiten 3-Komplex  $\tilde{K}$  ein. ( $\tilde{K} \neq K$ .)

1. Wir integrieren die Ladungsdichte-3-Form  $\rho$  über die 3-Zellen von  $\tilde{K}$  und erhalten auf diese Weise eine 3-Cokette,  $Q$  ("Ladung").
2. Wir integrieren die Stromdichte-2-Form  $j$  über die 2-Zellen von  $\tilde{K}$ . Dies ergibt eine 2-Cokette,  $I$  ("Strom").
3. Integration der elektrischen Erregung  $D$  über die 2-Zellen von  $\tilde{K}$  liefert eine 2-Cokette,  $\Phi^{(l)}$  ("elektrischer Fluß").
4. Integration der magnetischen Erregung  $H$  über die 1-Zellen von  $\tilde{K}$  liefert eine 1-Cokette,  $J$  ("magnetische Spannung").

Das Gaußsche Gesetz  $\int_{\partial c} D = \int_c \rho$  und das Ampère-Maxwell-Gesetz  $\int_{\partial c} H = \int_c (j + \dot{D})$  werden dann zu

$$\boxed{d\Phi^{(l)} = Q, \quad dJ = I + \dot{\Phi}^{(l)}}$$

(Der *Corand* des elektrischen Flusses ist gleich der Ladung. Der *Corand* der magnetischen Spannung ist gleich der Summe aus Strom und zeitlicher Änderung des elektrischen Flusses.)

Unsere Formulierung der Maxwell-Gleichungen auf zwei 3-Komplexen  $K$  und  $\tilde{K}$  ist völlig äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen in integraler Form. Da die Metrik des Raumes hier nicht eingeht, kann die Topologie von  $K$  und  $\tilde{K}$  beliebig gewählt werden (Tetraeder oder Würfel oder ...), ohne daß sich die Form der Gleichungen ändert. ■

### 3.3.3 Materialgleichungen

Wir wählen jetzt  $K$  und  $\tilde{K}$  so, daß jede 0-Zelle von  $K$  (bzw.  $\tilde{K}$ ) in genau einer 3-Zelle von  $\tilde{K}$  (bzw.  $K$ ) liegt, und jede 1-Zelle von  $K$  (bzw.  $\tilde{K}$ ) genau eine 2-Zelle von  $\tilde{K}$  (bzw.  $K$ ) durchsticht. Dann ist jede  $k$ -Zelle von  $K$  einer

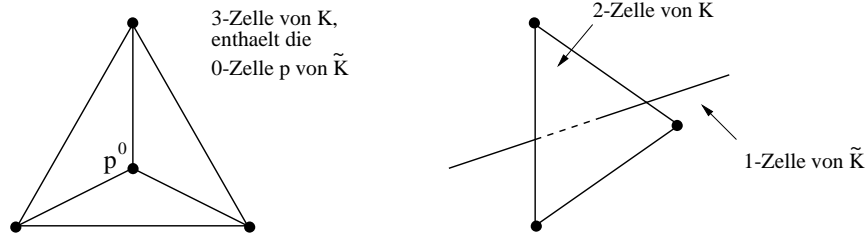


Abbildung 3.8.

$(3 - k)$ -Zelle von  $\tilde{K}$  eindeutig zugeordnet, und  $K$  und  $\tilde{K}$  sind in diesem Sinne zueinander dual.

Die Situation ist am übersichtlichen für den Fall zweier Komplexe  $K$  und  $\tilde{K}$ , die aus identischen Würfeln aufgebaut sind. Dann legen wir die 0-Zellen (Knoten) von  $K$  gegen ins Zentrum der 3-Zellen (Würfel) von  $\tilde{K}$ .

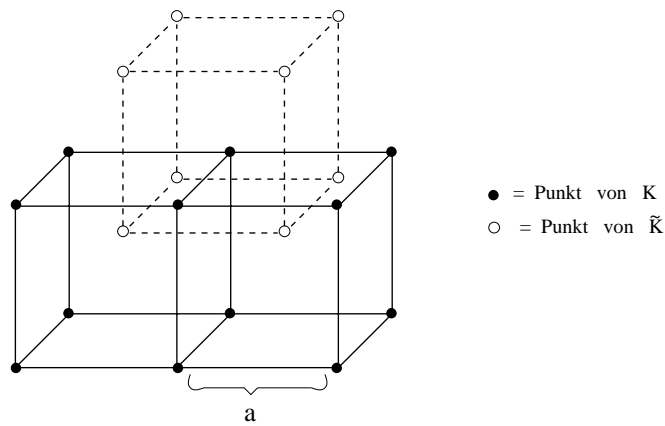


Abbildung 3.9.

Wir formulieren die Netzwerk-Materialgleichungen zunächst für diesen kubischen Fall. Sei  $\alpha$  eine 1-Zelle auf  $K$ ,  $S$  die korrespondierende 2-Zelle auf  $\tilde{K}$ :

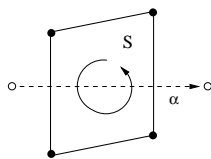


Abbildung 3.10.

Der elektrische Fluß durch  $S$  ist  $\Phi_S^{(l)}$ , die elektrische Spannung längs  $\alpha = V_\alpha$ . Sei  $a$  die Gitterkonstante des kubischen Gitters. Dann hat  $\alpha$  die Länge  $a$  und  $S$  die Fläche  $a^2$ . Da  $S$  und  $\alpha$  aufeinander senkrecht stehen, bedeutet die Materialgleichung  $D = \varepsilon_0 \star E$  die Gleichheit der Limites

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Phi_S^{(l)}}{a^2} = \varepsilon_0 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{V_\alpha}{a}.$$

Für  $a$  klein gilt dann *näherungsweise*:

$$\frac{\Phi_S^{(l)}}{a^2} \simeq \varepsilon_0 \frac{V_\alpha}{a} \quad \text{oder} \quad \Phi_S^{(l)} \simeq \varepsilon_0 a \cdot V_\alpha.$$

Das Product  $\varepsilon_0 a$  hat die physikalische Dimension Ladung/Spannung = Kapazität.

Für beliebige nichtkubische Komplexe  $K$ ,  $\tilde{K}$  können wir analog vorgehen, wenn wir verlangen, daß die korrespondierenden 1-Zellen von  $K$  und 2-Zellen von  $\tilde{K}$  wieder aufeinander *senkrecht* stehen. Dann erhalten wir

$$\Phi_S^{(l)} \simeq \frac{\text{Fläche}(S)}{\text{Länge}(\alpha)} \varepsilon_0 \cdot V_\alpha.$$

In basisfreier Schreibweise:  $\boxed{\Phi^{(l)} = \mathcal{C}^{(l)} V}$  mit  $\mathcal{C}^{(l)} : C^1 \rightarrow \tilde{C}^2$ .

(1-Cokette auf  $K \rightarrow 2$ -Coketten auf  $\tilde{K}$ .)  $\varphi^{(l)}$  hat, wie gesagt, die physikalische Dimension von Kapazität. ■

Dasselbe Vorgehen für den magnetischen Fall liefert  $\boxed{\Phi^{(m)} = \mathcal{C}^{(m)} J}$  mit  $\mathcal{C}^{(m)} : \tilde{C}^1 \rightarrow C^2$ .  $\mathcal{C}^{(m)}$  hat die physikalische Dimension magnetischer Fluß/magnetische Spannung = magnetischer Fluß/Strom = Induktivität.

(Für kubische Komplexe  $K$ ,  $\tilde{K} : \Phi_S^{(m)} = \mu_0 a \cdot J_\alpha$ .)

### 3.4 Flußlinien

Durch die eindeutige Zuordnung von  $k$ -Zellen  $\alpha$  auf  $K$  und  $(3-k)$ -Zellen  $\tilde{\alpha}$  auf  $\tilde{K}$  haben wir ein inneres Produkt  $C^k \times \tilde{C}^{3-k} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\langle \omega, \eta \rangle = \sum_{\alpha \in \Sigma_k} \omega_\alpha \eta_{\tilde{\alpha}}.$$

(Es entspricht der Integration  $\int_{E_3} \omega \wedge \eta$  im Kontinuum.)

Dieses innere Produkt ist linear in beiden Argumenten, so daß sich ein Element von  $\tilde{C}^{3-k}$  auch als Element des Dualraumes  $C_k$  von  $C^k$  auffassen läßt. Dadurch haben wir einen natürlichen Isomorphismus  $\mathcal{I} : \tilde{C}^{3-k} \rightarrow C_k$ , der jeder  $(3-k)$ -Cokette auf  $\tilde{K}$  eine  $k$ -Kette auf  $K$  eindeutig zuordnet.

In Formeln ist  $\mathcal{I}(\eta) \in C_k$  für  $\eta \in \tilde{C}^{3-k}$  definiert durch die Forderung

$$\langle \omega, \eta \rangle = \omega(\mathcal{I}(\eta))$$

für alle  $\omega \in C^k$ .

Vertauschen der Rollen von  $K$  und  $\tilde{K}$  definiert  $\mathcal{I}: C^{3-k} \rightarrow \tilde{C}_k$ .

(Der Isomorphismus  $\mathcal{I}$  entspricht dem durch die Gleichung  $\int_c \omega = \int_{\mathbb{E}_3} \omega \wedge \delta_c$  vermittelten Isomorphismus  $e \leftrightarrow \delta_c$  zwischen "verschmierter"  $k$ -Kette  $e$  und  $(3-k)$ -Form  $\delta_c$ , von dem in Abschnitt ?? die Rede war.)

Durch  $\mathcal{I}$  wird dem elektrischen Fluß  $\Phi^{(l)}$  auf  $\tilde{K}$  (bzw. dem magnetischen Fluß  $\Phi^{(m)}$  auf  $K$ ) eine 1-Kette  $\varphi^{(l)} := \mathcal{I}(\Phi^{(l)})$  auf  $K$  (bzw.  $\varphi^{(m)} := \mathcal{I}(\Phi^{(m)})$  auf  $\tilde{K}$ ) zugeordnet. Der Wert von  $\varphi^{(l)}$  auf einer 1-Zelle  $\alpha$  von  $K$  (d.h.  $\alpha^*(\varphi^{(l)})$ ) ist gleich dem elektrischen Fluß durch die zu  $\alpha$  korrespondierende 2-Zelle  $\rho \equiv \tilde{\alpha}$  auf  $\tilde{K}$ :

*Beispiel 3.4.1.*  $\Phi^{(l)} = \dots + x \cdot S^* + \dots \in \tilde{C}^2$ ;  $\varphi^{(l)} = \dots + x \cdot \alpha + \dots \in C_1$

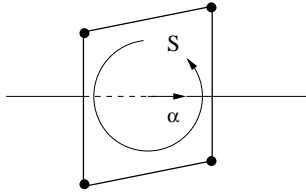


Abbildung 3.11.

Eine analoge Aussage gilt für den magnetischen Fluß.

Partielle Integration im Kontinuum

$$\int_{\mathbb{E}_3} \omega \wedge d\eta = -(-)^{\text{deg}(\omega)} \int_{\mathbb{E}_3} d\omega \wedge \eta$$

impliziert "partielle Integration" auf dem Netzwerk:

$$\langle \omega, d\eta \rangle = -(-)^{\text{deg}(\omega)} \langle d\omega, \eta \rangle .$$

(Hier  $\omega \in C^k$  und  $d\eta \in \tilde{C}^{3-k}$ .)

Es folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \underbrace{f}_{\in C^0}, \underbrace{d\Phi^{(l)} - Q}_{\in \tilde{C}^3} \right\rangle = -\langle f, Q \rangle - \langle df, \Phi^{(l)} \rangle \\ &= f(\mathcal{I}(Q)) - (df)(\mathcal{I}(\Phi^{(l)})) = -\underbrace{f(\mathcal{I}(Q))}_{=:q} + \partial \circ \underbrace{\mathcal{I}(\Phi^{(l)})}_{=: \varphi^{(l)}} \\ &= -f(q + \partial\varphi^{(l)}) . \quad f \text{ beliebig} \Rightarrow q + \partial\varphi^{(l)} = 0 . \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man  $d\Phi^{(m)} = 0 \Leftrightarrow \partial\varphi^{(m)} = 0$ .

**Zusammenfassung:**

Die Gleichungen  $d\Phi^{(l)} = Q$  (auf  $\tilde{K}$ ) und  $d\Phi^{(m)} = 0$  (auf  $K$ ) lassen sich durch Übertragung auf den jeweils dualen Komplex auch folgendermaßen schreiben:

$$\boxed{\partial\varphi^{(l)} = -q, \quad \partial\varphi^{(m)} = 0}$$



Hierbei ist  $q = \mathcal{I}(Q)$  die der Ladung  $Q \in \tilde{C}^3$  zugeordnete Ladungs-0-Kette  $q \in C_0$ .

*In Worten:* die dem magnetischen Fluß  $\Phi^{(m)}$  zugeordnete 1-Kette  $\varphi^{(m)}$  hat verschwindenden Rand. Der Rand der dem elektrischen Fluß zugeordneten 1-Kette  $\varphi^{(l)}$  ist gleich minus der Ladungs-0-Kette  $q$ .

*Interpretation:*

$\partial\varphi^{(m)} = 0$  bedeutet (vgl. auch 1. Kirchhoffsches Gesetz  $\partial I = 0$  für ein resistives Netzwerk), daß in jedem Knoten von  $\tilde{K}$  ebensoviel magnetischer Fluß hinein- wie herausfließt.

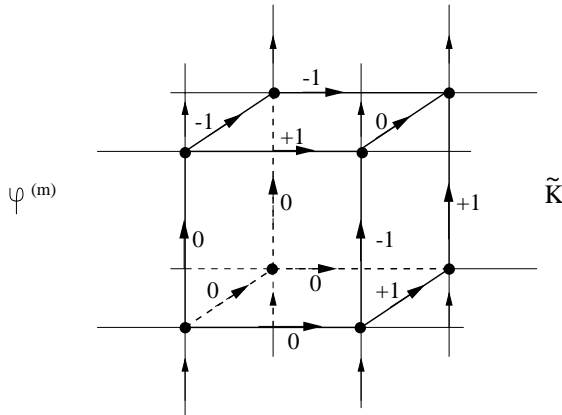


Abbildung 3.12.

*Beispiel 3.4.2.*  $\Rightarrow \varphi^{(m)}$  ist aus geschlossenen Wegen (= "1-Zyklen") aufgebaut. Diese lassen sich als *magnetische Flußlinien* interpretieren.

(Bemerkung: wir erinnern daran, daß die Gleichung  $dB = 0$  durch  $B = dA$  ( $A =$  Eichpotential) gelöst wird. Analog läßt sich  $\partial\varphi^{(m)} = 0$  lösen durch die Einführung einer 2-Kette  $a \in \tilde{C}_2$ :  $\varphi^{(m)} = \partial a$ . Wie  $A$  ist auch  $a$  nicht eindeutig: wir können zu  $a$  immer den Rand  $\partial c$  einer beliebigen 3-Kette  $c \in \tilde{C}_3$  hinzufügen, ohne  $\varphi^{(m)}$  zu ändern. ( $\partial(a + \partial c) = \partial a + \underbrace{\partial\partial c}_{=0} = \varphi^{(m)}$ .)

Die Gleichung  $\partial\varphi^{(l)} = -q$  bedeutet, daß an jedem Knoten von  $K$  die Differenz von herausströmendem und hineinströmendem elektrischen Fluß gleich der Ladung an dem Knoten sein muß.

*Beispiel 3.4.3.* Auch den elektrischen Fluß können wir uns durch Flußlinien aufgebaut denken. Wegen  $\partial\varphi^{(l)} = -q$  sind elektrische Flußlinien entweder geschlossen, oder sie beginnen auf positiven und enden auf negativen Ladungen.

(*Betrachte:* die Zerlegung nach Flußlinien ist im allgemeinen nicht eindeutig. Zum Beispiel läßt sich auffassen als

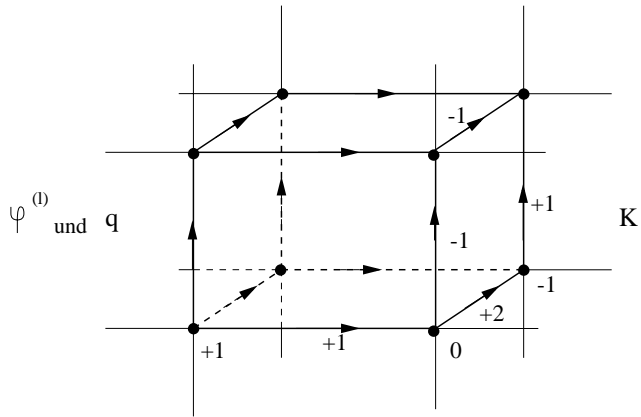


Abbildung 3.13.

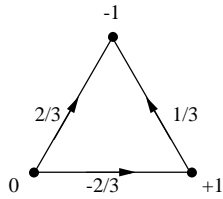


Abbildung 3.14.

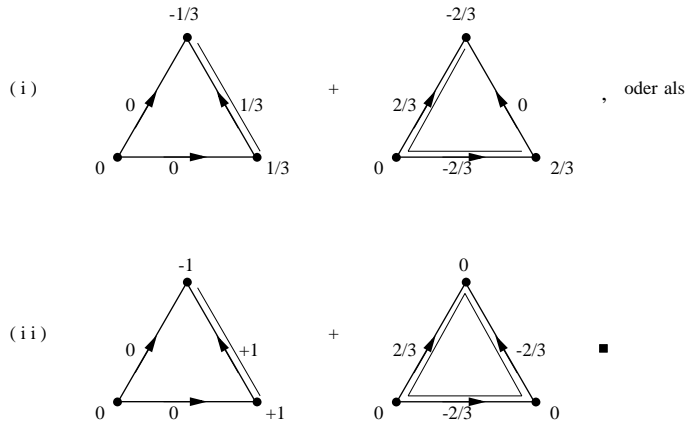


Abbildung 3.15.

### 3.5 Dynamik (diskret)

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die Zwangsbedingungen der diskretisierten Maxwell'schen Theorie mit Hilfe des Isomorphismus  $\mathcal{I}$  umformuliert ( $\partial\varphi^{(l)} = -q$ ,  $\partial\varphi^{(m)} = 0$ ) und veranschaulicht. Nun wollen wir Entsprechendes auch mit den dynamischen Gleichungen tun. Wir beginnen mit dem Faradayschen Induktionsgesetz  $\dot{\Phi}^{(m)} = -dV$ . Anwendung von  $\mathcal{I}$  auf beiden Seiten ergibt  $\dot{\varphi}^{(m)} = -\mathcal{I}(dV)$ .

*Behauptung:*  $\mathcal{I}(dV) = \partial\mathcal{I}(V)$ .

*Beweis* (graphisch; für kubische Komplexe): Sei



Abbildung 3.16.

Damit ist

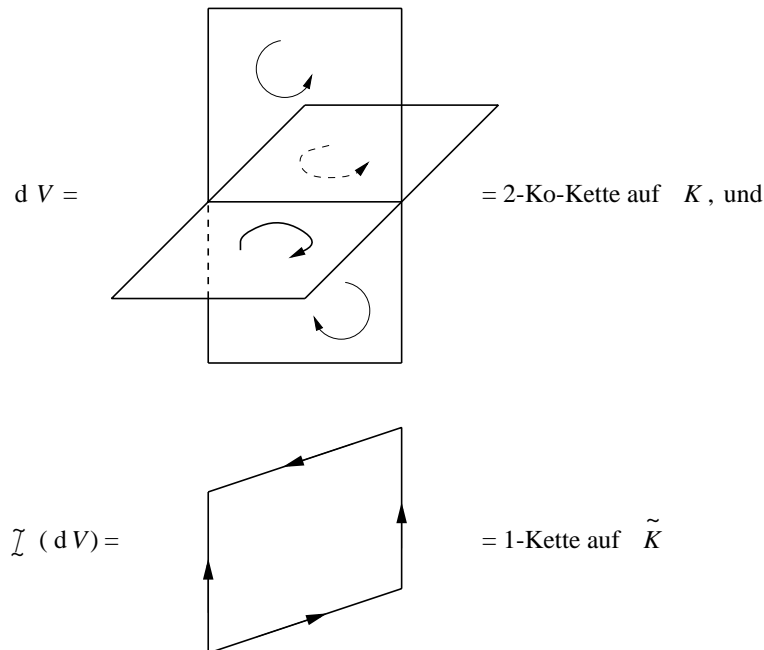


Abbildung 3.17.

Andererseits ist

*Beweis* (algebraisch; allgemein): Sei  $\omega \in \tilde{C}^1$  beliebig.

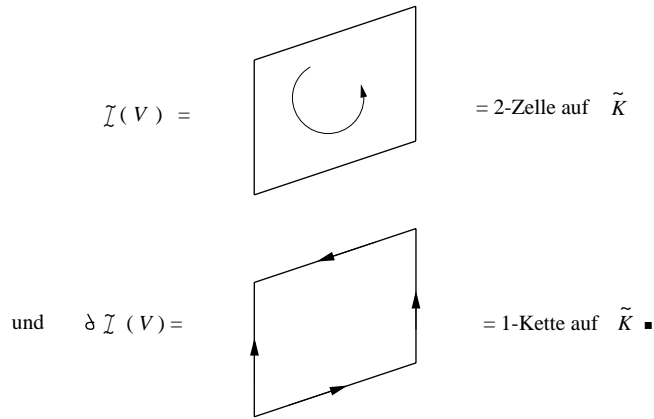


Abbildung 3.18.

$$\omega(\mathcal{I}(dV)) = \langle \omega, dV \rangle \stackrel{\text{p.I.}}{=} + \langle d\omega, V \rangle = (d\omega)(\mathcal{I}(V)) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \omega(\partial \mathcal{I}(V)) \blacksquare$$

Mit  $\mathcal{I}(dV) = \partial \mathcal{I}(V)$  wird das Induktionsgesetz zu

$$\dot{\varphi}^{(m)} = -\partial \mathcal{I}(V).$$

In analoger Weise formen wir das Ampère–Maxwell–Gesetz  $dJ = I + \dot{\varphi}^{(l)}$  in:

$$\dot{\varphi}^{(l)} = \partial \mathcal{I}(J) - \mathcal{I}(I).$$

Vom Standpunkt der Relativitätstheorie ist es unnatürlich, Zeit und Raum verschieden zu behandeln. Deshalb nehmen wir nach der Diskretisierung des Raumes nun auch eine Diskretisierung der Zeit vor und schreiben:

$$\frac{1}{\tau} \left( \varphi^{(m)} \Big|_{t+\tau/2} - \varphi^{(m)} \Big|_{t-\tau/2} \right) = -\partial \mathcal{I}(V) \Big|_t,$$

$$\frac{1}{\tau} \left( \varphi^{(l)} \Big|_{t+\tau} - \varphi^{(l)} \Big|_t \right) = \partial \mathcal{I}(J) - \mathcal{I}(I) \Big|_{t+\tau/2}.$$

$\tau$  ist der Zeitschritt. Elektrische Größen ( $\varphi^{(l)}, V, q$ ) werden für “ganze” Zeiten  $\dots t, t + \tau, t + 2\tau, \dots$  erklärt, magnetische Größen ( $\varphi^{(m)}, J, I$ ) für “halbe” Zeiten  $\dots t - \tau/2, t + \tau/2, t + 3\tau/2, \dots$  (Diese relative Verschiebung entspricht der räumlichen “Verzahnung” der Komplexe  $K$  and  $\tilde{K}$ .)

Das Faradaysche Induktionsgesetz in diskreter Form bedeutet folgendes:

Fällt zur Zeit  $t$  längs einer 1-Zelle  $\gamma$  von  $K$  die elektrische Spannung  $U$  ab, so wird im Zeitschritt von  $t - \tau/2$  bis  $t + \tau/2$  dem Komplex  $\tilde{K}$  eine  $\gamma$  im linkshändigen Sinn (lenzsche Regel) zirkulierende magnetische Flußlinie der Stärke  $U \cdot \tau$  hinzugefügt:

$$V \Big|_t = \dots + U \cdot (\text{Bild 3.19}) + \dots \Leftrightarrow$$

$$\varphi^{(m)} \Big|_{t+\tau/2} - \varphi^{(m)} \Big|_{t-\tau/2} = \dots + \tau U \cdot (\text{Bild 3.20}) + \dots$$

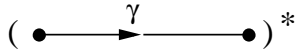


Abbildung 3.19.

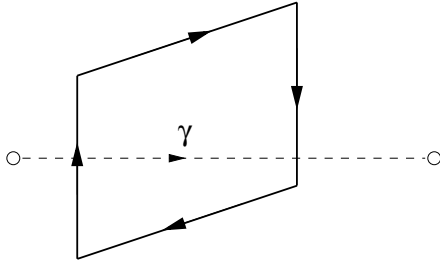


Abbildung 3.20.

Für das Ampère–Maxwell–Gesetz in diskreter Form gilt mit den offensichtlichen Ersetzungen ( $V \leftrightarrow J$ ,  $K \leftrightarrow \tilde{K}$ , magnetisch  $\leftrightarrow$  elektrisch, rechtshändig  $\leftrightarrow$  linkshändig) eine identische Aussage, wobei allerdings noch der Beitrag des Stromes ( $\mathcal{I}(I)$ ) zu berücksichtigen ist. ■

#### Zusammenfassung.

Zur diskreten Formulierung der Maxwell'schen Theorie bedienen wir uns zweier zueinander dualer 3–Komplexe  $K$  und  $\tilde{K}$  und einer diskreten Zeit mit Zeitschritt  $\tau$ . Wir beschreiben

- (1) den elektrischen Fluß  $\varphi^{(l)}$  als 1–Kette auf  $K$ ,
- (2) die elektrische Spannung  $V$  als 1–Cokette auf  $K$ ,
- (3) die Ladung  $q$  als 0–Kette auf  $K$ ;

(alle zu ganzen Zeiten  $\dots t, t + \tau, t + 2\tau, \dots$ )

- (1') den magnetischen Fluß  $\varphi^{(m)}$  als 1–Kette auf  $\tilde{K}$ ,
- (2') die magnetische Spannung  $\tau$  als 1–Cokette auf  $\tilde{K}$ ,
- (3') den Strom  $I$  als 2–Cokette auf  $\tilde{K}$ .

(alle zu halben Zeiten  $\dots t - \tau/2, t + \tau/2, t + 3\tau/2, \dots$ )

Die diskretisierten Maxwell–Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \partial\varphi^{(l)} &= -q, & \partial\varphi^{(m)} &= 0, \\ \varphi^{(m)}|_{t+\tau/2} - \varphi^{(m)}|_{t-\tau/2} &= -\partial\mathcal{I}(V)|_t, \\ \varphi^{(l)}|_{t+\tau} - \varphi^{(l)}|_t &= \partial\mathcal{I}(J) - \mathcal{I}(I)|_{t+\tau/2}. \end{aligned}$$

Die diskretisierten Materialgleichungen lauten

$$\varphi^{(l)} = \mathcal{C}V, \quad \varphi^{(m)} = \mathcal{L}J.$$

Hierbei hat  $\mathcal{C} := \mathcal{I} \circ \mathcal{C}^{(l)} : C^1 \rightarrow C_1$  ( $\mathcal{L} := \mathcal{I} \circ \varphi^{(m)} : \tilde{C}^1 \rightarrow \tilde{C}_1$ ) die physikalische Dimension *Kapazität* (*Induktivität*).

*Korollar:* Elektrostatik ist auf einem einzigen 2-Komplex  $K$  formulierbar. Die Gleichungen der Elektrostatik  $\partial\varphi^{(l)} = -q$ ,  $\varphi^{(l)} = \varphi V$ ,  $dV = 0$  sind formal identisch mit den Gleichungen eines kapazitiven Netzwerks  $\partial Q = -\rho$ ,  $Q = CV$ ,  $dV = 0$ . Magnetostatik ist auf einem 3-Komplex  $\tilde{K}$  formulierbar. Die Grundgleichungen sind in diesem Fall  $\partial\varphi^{(m)} = 0$ ,  $\varphi^{(m)} = \mathcal{L}J$  und  $dJ = I$ . ■

Wir wollen jetzt am einfachsten Beispiel die *Propagation elektromagnetischer Wellen* illustrieren. Dazu betrachten wir kubische Komplexe mit Gitterkonstante  $a$ . Sei  $*$ :  $C^1 \rightarrow C_1$  ( $C_1 \rightarrow C^1$ ,  $\tilde{C}^1 \rightarrow \tilde{C}_1$ ,  $\tilde{C}_1 \rightarrow \tilde{C}^1$ ) der Operator, der 1-Zellen in ihre Dualelemente umwandert und umgekehrt. Es gilt dann

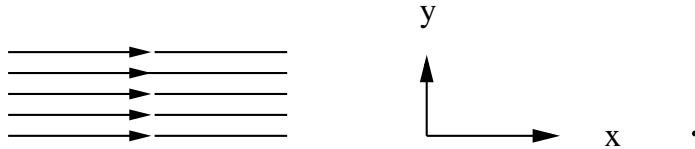
$$\mathcal{C} = a\varepsilon_0 * \quad \text{und} \quad \mathcal{L} = a\mu_0 * .$$

Wir treffen folgende Wahl des Zeitschritts  $\tau$ :  $\tau := a/c = a(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$ , und wir setzen der Einfachheit halber  $q = 0$ ,  $I = 0$  (materiefreier Raum). Durch Verwenden der Materialgleichungen in den dynamischen Gleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi^{(m)}|_{t+\tau/2} - \varphi^{(m)}|_{t-\tau/2} &= - \left( \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \partial\mathcal{I}(*\varphi^{(l)})|_t , \\ \varphi^{(l)}|_{t+\tau} - \varphi^{(l)}|_t &= + \left( \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \partial\mathcal{I}(*\varphi^{(m)})|_{t+\tau/2} . \end{aligned}$$

Es seien nun folgende Anfangsbedingungen gegeben:

- (i) Zur Zeit  $t = 0$  ist die Ebene  $z = 0$  homogen mit elektrischen Flußlinien (der Stärke 1 Coulomb) ausgefüllt, die in  $x$ -Richtung verlaufen:



**Abbildung 3.21.**

- (ii) Zur Zeit  $t = \tau/2$  ist die Ebene  $z = a/2$  mit magnetischen Flußlinien (der Stärke  $(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2} \times 1\text{Coulomb}$ ) homogen erfüllt, die in  $y$ -Richtung verlaufen:

Diese Anfangsbedingungen erfüllen offensichtlich die Zwangsbedingungen  $\partial\varphi^{(l)} = \partial\varphi^{(m)} = 0$ .

Was passiert nun mit zunehmender Zeit?

*Antwort:* Im Zeitintervall von 0 bis  $\tau$  (bzw.  $\tau/2$  bis  $3\tau/2$ ) bewegen sich alle elektrischen (bzw. magnetischen) Flußlinien um eine Einheit der Gitterkonstante  $a$  in  $z$ -Richtung fort.

*Beweis:*

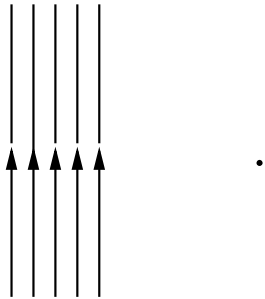


Abbildung 3.22.

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{I} (* \begin{array}{c} | | | | \\ | | | | \\ \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ | | | | \end{array} ) &= \begin{array}{c} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ | \quad | \quad | \quad | \\ z = a/2 \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ | \quad | \quad | \quad | \\ z = 0 \end{array} \\ \\ \partial \mathcal{I} (* \begin{array}{c} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ | \quad | \quad | \quad | \\ z = a \end{array} ) &= \begin{array}{c} | | | | \\ | | | | \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ | | | | \\ z = 3a/2 \end{array} + \begin{array}{c} | | | | \\ | | | | \\ \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ | | | | \\ z = a/2 \end{array} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Abbildung 3.23.





## 4. Elektromagnetische Wellen

Es wurde schon in Abschn. 1.7 angedeutet, daß die Gleichungen für das elektromagnetische Feld Lösungen zulassen, die den Charakter von sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzenden Wellen haben. Die Existenz elektromagnetischer Wellen ist eine der herausragenden Vorhersagen der von Maxwell formulierten Theorie. Sie bildet die Grundlage für einen großen Teil der modernen Technologie, vor allem der Telekommunikation. Eine ganz wesentliche Eigenschaft der Maxwellschen Theorie ist ihre Linearität. Diese gestattet es – in Verbindung mit speziellen Eigenschaften, die von der Dreidimensionalität des Raumes herrühren – für vorgegebene Ladungen und Ströme die Lösung der Gleichungen für das elektromagnetische Feld in sehr expliziter Form anzugeben.

### 4.1 Wellengleichungen für $B$ , $D$ , $H$ und $E$

*Entkoppeln der Grundgleichungen.* Das in Abschn. 1.7 zusammengestellte Gleichungssystem der Maxwellschen Theorie koppelt die Felder  $E$ ,  $B$ ,  $D$  und  $H$  miteinander. Zum Zweck der systematischen Lösung ist es günstig, die Gleichungen zu entkoppeln und je eine Gleichung für jede kartesische Komponente des elektromagnetischen Feldes aufzustellen. Wir exemplifizieren die Entkopplungsprozedur am Beispiel der magnetischen Feldstärke  $B$ . Ausgehend von  $\dot{B} = -dE$  erhalten wir durch Differenzieren nach der Zeit und sukzessives Verwenden der Gleichungen  $\dot{E} = \star \dot{D} / \epsilon_0$ ,  $\dot{D} = dH - j$  und  $H = \star B / \mu_0$  das Zwischenergebnis

$$\ddot{B} = -(\epsilon_0 \mu_0)^{-1} d \star d \star B + \epsilon_0^{-1} d \star j.$$

Jetzt multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit dem inversen Quadrat der Lichtgeschwindigkeit  $c^{-2} = \epsilon_0 \mu_0$ . Mit dem in Abschn. 0.20 eingeführten Differentialoperator  $\delta$  gilt  $\star d \star B = -\delta B$ , und wir erhalten somit

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B = d \delta B + \mu_0 d \star j.$$

Wegen der Quellenfreiheit von  $B$  dürfen wir auf der rechten Seite  $\delta d B$  hinzufügen, ohne die Gleichung zu ändern. Da  $\delta d + d \delta$  der Laplace-Operator  $\Delta$  ist, folgt

$$\square B = \mu_0 d \star j \quad \text{mit} \quad \square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (4.1)$$

Der Differentialoperator  $\square$  wird *Wellenoperator* oder *d'Alembert-Operator* genannt. In Kap. 5 werden wir lernen, daß er (das Vorzeichen ausgenommen) mit dem Laplace-Operator auf dem vierdimensionalen Minkowski-Raum identisch ist. Die Gleichung  $\square B = \mu_0 d \star j$  heißt die *inhomogene Wellengleichung* für  $B$ . Sie enthält neben räumlichen Ableitungen der elektrischen Stromdichte  $j$  die magnetische Feldstärke  $B$  als einzige Feldgröße. In Abschn. 4.3.3 werden wir zeigen, daß sie  $B$  – bei Kenntnis der Anfangsbedingungen – vollständig bestimmt. Die rechte Seite der inhomogenen Wellengleichung nennen wir den *Quellterm*, und  $\square B = 0$  heißt die zugeordnete *homogene Wellengleichung*.

*Aufgabe 4.1.1.* Zeige, daß die Felder  $H$ ,  $D$  und  $E$  den inhomogenen Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \square H &= -\delta j, \\ \square D &= -\delta \rho - c^{-2} \partial j / \partial t, \\ \square E &= -\varepsilon_0^{-1} d \star \rho - \mu_0 \star \partial j / \partial t \end{aligned}$$

genügen. (Tip: Gehe für  $D$  analog zu  $B$  vor, und verwende für  $H$  und  $E$  die Relation  $\star \square = \square \star$ .)

*Gleichungen für die Komponenten.* In Koordinatendarstellung durch eine kartesische Basis können wir nach Abschn. 0.20 das Resultat der Operation von  $\Delta$  auf eine Differentialform beliebigen Grades dadurch berechnen, daß wir  $\Delta$  auf jede kartesische Komponente der Differentialform anwenden. Diese Eigenschaft überträgt sich trivial auf den Wellenoperator  $\square$ . Zum Beispiel gilt:

$$\square \left( \sum_{i < j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j \right) = \sum_{i < j} (\square B_{ij}) dx^i \wedge dx^j.$$

In Koordinatendarstellung  $\star j =: j_x dx + j_y dy + j_z dz$  folgen daher aus  $\square B = \mu_0 d \star j$  die Gleichung

$$\square B_{xy} = \mu_0 \left( \frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \right)$$

und zwei weitere Gleichungen, die durch zyklisches Vertauschen der Indexmenge  $\{x, y, z\}$  entstehen.

*Aufgabe 4.1.2.* Wie lauten die inhomogenen Wellengleichungen für  $H$ ,  $D$  und  $E$  in Koordinatendarstellung durch die kartesische Basis  $dx, dy, dz$ ?

## 4.2 Ebene Wellen

Wir haben gesehen, daß jede Komponente  $f$  des elektromagnetischen Feldes einer inhomogenen Wellengleichung  $\square f = g$  (mit  $g$  einer Funktion : Raum  $\times$  Zeit  $\rightarrow \mathbb{R}$ ) genügt. Für das magnetische Feld besteht der Quellterm  $g$  aus räumlichen Ableitungen der Stromdichte, für das elektrische Feld setzt er sich aus räumlichen Ableitungen der Ladungsdichte und Zeitableitungen der Stromdichte zusammen. Bevor wir in Abschn. 4.3.3 die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung konstruieren, wollen wir hier unser Verständnis präparieren, indem wir die Lösung für den Fall berechnen, daß Invarianz unter Translationen in  $y$ - und  $z$ -Richtung vorliegt. Das Problem vereinfacht sich in diesem Fall zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung in *einer* Dimension ( $x \in \mathbb{R}$ ):

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x, t) = g(x, t).$$

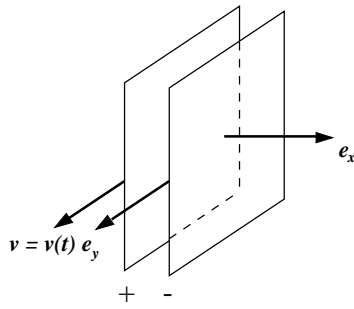
Die ihr zugeordnete homogene Gleichung wird – wie man sofort sieht – durch  $f(x, t) = F(x \pm ct)$  mit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Funktion gelöst. Es folgen einige Anwendungen der eindimensionalen Wellengleichung...

### 4.2.1 Ein Beispiel für Pulserzeugung

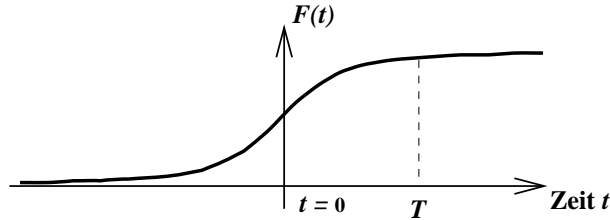
Wir betrachten zwei ebene, unendlich ausgedehnte Platten, auf denen in gleichmäßiger Verteilung Ladungen befestigt sind (Abb. 4.1). Die Platten sollen parallel zueinander angeordnet sein und eine dem Betrag nach gleiche und im Vorzeichen verschiedene Flächenladungsdichte tragen, so daß das System insgesamt elektrisch neutral ist. Um den Zeitpunkt Null herum versetzen wir die beiden Platten in den gleichen Bewegungszustand. Für Zeiten lange nach Null fließt dann in Bewegungsrichtung der Platten ein stationärer elektrischer Strom. Nun erzeugt das Hochfahren des Stroms einen elektromagnetischen Puls, der senkrecht zu den Platten abgestrahlt wird. Diesen Puls wollen wir im folgenden quantitativ beschreiben, was wegen der Invarianz des Problems unter Translationen in der Plattenebene leicht fällt.

Die Anordnung sei so gewählt, daß die positiv geladene Platte in der zur  $yz$ -Ebene parallelen Ebene  $x = -d$  ( $d > 0$ ) liegt, die negativ geladene in der Ebene  $x = +d$ . Der Geschwindigkeitsvektor zeige in  $y$ -Richtung. Unter Vernachlässigung der Plattendicke beschreiben wir dann den Stromfluß in den Plattenebenen durch eine homogene Linienstromdichte  $k = \pm 2F dz$ , wobei die Form der Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch den zeitlichen Verlauf des Anschaltvorgangs gegeben ist, dessen Zeitskala  $T$  sei (Abb. 4.2).

Die singuläre Stromdichte resultiert in Anschlußbedingungen für die magnetische Erregung an den Plattenebenen  $x = \pm d$ . Die  $x$ - und  $y$ -Komponenten von  $H$  verhalten sich stetig, während  $H_z$  springt, sobald der Stromfluß einsetzt.



**Abbildung 4.1.** Zwei Platten mit entgegengesetzter Flächenladungsdichte werden in Bewegung versetzt.



**Abbildung 4.2.** Graph der Anschaltfunktion  $F$

Wenn wir den Grenzwert von  $H_z$  bei Annäherung vom Halbraum  $x > \pm d$  (bzw.  $x < \pm d$ ) an eine Platte mit  $H_z^+$  (bzw.  $H_z^-$ ) bezeichnen, dann gilt

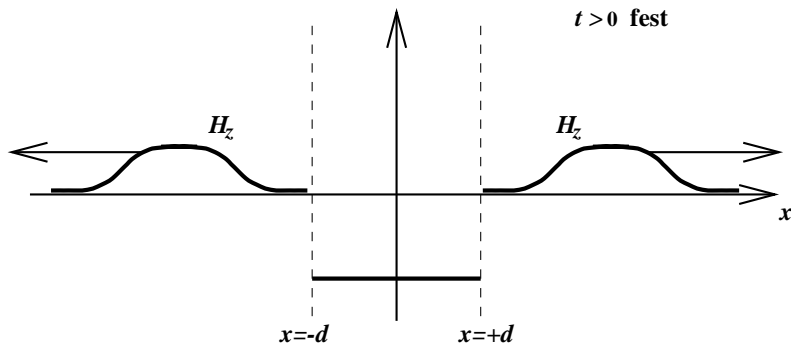
$$H_z^+ \Big|_{x=\pm d} - H_z^- \Big|_{x=\pm d} = \pm 2F .$$

Die Zeitentwicklung von  $H_z$  können wir wegen der Eindimensionalität des Problems ohne Mühe erraten. Sie lautet:

$$H_z(a, t) = \begin{cases} +F\left(t + \frac{x(a)+d}{c}\right) - F\left(t + \frac{x(a)-d}{c}\right) & x(a) < -d , \\ -F\left(t - \frac{x(a)+d}{c}\right) - F\left(t + \frac{x(a)-d}{c}\right) & -d < x(a) < +d , \\ -F\left(t - \frac{x(a)+d}{c}\right) + F\left(t - \frac{x(a)-d}{c}\right) & +d < x(a) . \end{cases}$$

Dieser Ausdruck erfüllt die homogene Wellengleichung  $\square H_z = 0$  für  $x \neq \pm d$ , und er genügt den angegebenen Anschlußbedingungen. Die Skizze der Lösung in Abb. 4.3 zeigt zwei Pulse oder Wellenberge, die nach  $x = \pm\infty$  weglaufen. Für  $d \ll cT$  wird das Profil der Wellenberge durch die erste Ableitung der Funktion  $F$  bestimmt. Zwischen den Platten bildet sich ein konstantes Magnetfeld aus, so wie wir es aufgrund des (für  $t \gg 0$ ) stationären Stromes in  $z$ -Richtung erwarten. Die Komponenten  $H_x$  und  $H_y$  verschwinden für alle Zeiten.

*Aufgabe 4.2.1.* Wie sieht für dieses Beispiel der zeitliche Verlauf der elektrischen Feldstärke aus?

Abbildung 4.3. Graph von  $H_z$  für Bsp. 4.2.1

#### 4.2.2 Skin-Effekt

In Metallen (z.B. Cu, Ag, Pb) gilt für Zeitskalen länger als  $\sim 10^{-14}$  Sekunden näherungsweise das *Ohmsche Gesetz*  $j = \sigma \star E$ . (Dies ist die lokale Version der Beziehung  $I = U/R$ .) Die elektrische Leitfähigkeit genannte Materialkonstante  $\sigma$  hat die physikalische Dimension

$$[\sigma] = \frac{[j]}{\text{Länge} \times [E]} = \frac{\text{Ladung}^2}{\text{Energie} \times \text{Zeit} \times \text{Länge}}.$$

Wir betrachten im folgenden eine ebene monochromatische elektromagnetische Welle mit elektrischer Feldstärke  $E = \text{Re}(e^{ikx - i\omega t}) E_0 dy$ , die auf eine metallische Oberfläche trifft:

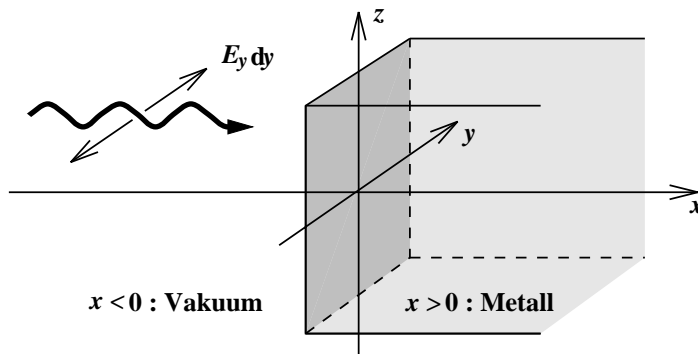


Abbildung 4.4. Eine elektromagnetische Welle trifft auf eine Metalloberfläche

Die Welle dringt bis zu einer endlichen Tiefe  $\lambda$  (= Skin-Tiefe) in das Metall ein. Diese Eindringtiefe wird folgendermaßen berechnet.

Im Fall  $\rho = 0$  lautet die Wellengleichung für  $E$  wie folgt:

$$\square E = -\mu_0 \star \frac{\partial j}{\partial t} \stackrel{\text{(Ohm)}}{=} -\mu_0 \sigma \dot{E}.$$

Sie wird für  $x < 0$  (im Vakuum ist  $\sigma = 0$ ) durch die einfallende ebene Welle  $E = \text{Re}(e^{i\omega x/c - i\omega t}) E_0 dy$  gelöst. Im Metall ( $x > 0$ ) führt der Ansatz  $E = \text{Re}(e^{ik(\omega)x - i\omega t}) E_0 dy$  auf die algebraische Gleichung

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2(\omega) = i\mu_0 \sigma \omega.$$

Der Term  $\omega^2/c^2$  auf der linken Seite ist im gesamten Frequenzbereich, in dem das Ohmsche Gesetz Gültigkeit hat, vernachlässigbar. (Zum Beispiel ist  $\mu_0 \sigma c^2 \approx 10^{19} \text{Hz}$  für Cu bei Zimmertemperatur.)

Es folgt:  $k = \text{Re}k + i\text{Im}k$ ;  $\text{Re}k = \text{Im}k = \sqrt{\mu_0 \sigma \omega / 2}$ . Aus physikalischen Gründen (exponentiell abklingende anstatt exponentiell anwachsende Welle!) haben wir die Wurzel mit dem positiven Vorzeichen gewählt. Somit haben wir im metallischen Raumbereich

$$E = \text{Re}(b e^{-\text{Im}k \cdot x} e^{i\text{Re}k \cdot x - i\omega t}) E_0 dy$$

mit  $b \in \mathbb{C}$  einer Konstanten. Die Eindringtiefe ist offenbar  $\lambda = (\text{Im}k)^{-1} = \sqrt{\mu_0 \sigma \omega / 2}^{-1}$ . Für Cu bei Zimmertemperatur ( $\sigma = 5.7 \times 10^7 (\text{Ohm} \times \text{Meter})^{-1}$ ) findet man für  $\omega = 10^{10} \text{Hz}$  (Mikrowellenfrequenz)  $\lambda = 1.5 \times 10^{-6} \text{Meter}$ .

Wodurch wird die Konstante  $b$  festgelegt? Wir müssen berücksichtigen, daß für  $x < 0$  (Vakuum) neben der einlaufenden ebenen Welle auch eine auslaufende (oder reflektierte) ebene Welle

$$E = \text{Re}(a e^{-i\omega x/c - i\omega t}) E_0 dy$$

anzusetzen ist. Aus der Stetigkeit von  $E$  und seiner Ortsableitung für  $x = 0$  lassen sich dann  $a$  und  $b$  berechnen.

*Aufgabe 4.2.2.* Führe diese Rechnung durch! Wie groß ist die im Metall dissipierte Leistung?

### 4.2.3 Brechung an ebenen Grenzflächen

Hier sollte man noch etwas zur Propagation ebener Wellen in Materie sagen und insbesondere den Brechungswinkel und die Reflexionsamplitude an einer Grenzfläche berechnen.

### 4.2.4 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

*Aufgabe 4.2.3.* Zu betrachten sei die homogene Wellengleichung

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x, t) = 0$$

mit den Anfangsdaten  $f(x, 0) = u(x)$  und  $\dot{f}(x, 0) = v(x)$ . Verifizieren Sie, daß sie für  $t > 0$  folgende Lösung hat:

$$f(x, t) = \frac{1}{2} \left( u(x + ct) + u(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(x') dx' \right) . \blacksquare$$

Für vorgegebene Anfangsbedingungen zur Zeit  $t = 0$  stellt Aufg. 4.2.3 die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung in 1 Dimension bereit. Wir wenden uns jetzt dem komplementären Problem zu, das in der Lösung der entsprechenden inhomogenen Anfangswertaufgabe besteht, nämlich

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x, t) = g(x, t)$$

für  $t > 0$ , mit den Anfangsdaten  $f(x, 0) = \dot{f}(x, 0) = 0$ . Diese Aufgabe wird folgendermaßen gelöst. Es sei  $h_s(x, t)$  für  $s \in \mathbb{R}$  und  $t \geq s$  die Lösung der homogenen Wellengleichung zu den Anfangsbedingungen  $h_s(x, t)|_{t=s} = 0$  und  $c^{-1} \dot{h}_s(x, t)|_{t=s} = g(x, s)$ . Dann behaupten wir, daß die Lösung der Anfangswertaufgabe durch

$$f(x, t) = c \int_0^t h_s(x, t) ds$$

gegeben ist. Zum Beweis dieser Behauptung weisen wir zunächst nach, daß der angegebene Ausdruck für  $f$  den geforderten Anfangsbedingungen genügt.  $f(x, 0) = 0$  ist klar, und  $\dot{f}(x, 0) = 0$  folgt aus

$$\dot{f}(x, t) = c \int_0^t \dot{h}_s(x, t) ds ,$$

wobei die Anfangsbedingung  $h_t(x, t) = 0$  benutzt wurde. Nochmaliges Differenzieren nach der Zeit ergibt

$$c^{-2} \ddot{f}(x, t) = c^{-1} \dot{h}_s(x, t)|_{s=t} + c^{-1} \int_0^t \ddot{h}_s(x, t) ds .$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist nach Vorgabe gleich  $g(x, t)$ . Außerdem ist  $h_s(x, t)$  Lösung der homogenen Wellengleichung, d.h. es gilt  $c^{-1} \ddot{h}_s(x, t) = c \partial^2 h_s(x, t) / \partial x^2$ , worauf die zu beweisende Behauptung sofort folgt.

*Aufgabe 4.2.4.* Die Werte der Funktion  $f$  und ihrer Zeitableitung  $\dot{f}$  zur Zeit  $t = 0$  seien vorgegeben. Es soll dann mit Hilfe des Resultats von Aufg. 4.2.3 und der Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe gezeigt werden, daß die inhomogene Wellengleichung  $\square f = g$  in 1 Dimension für  $t \geq 0$  durch folgende Formel gelöst wird:

$$f(x, t) = \frac{c}{2} \int_0^t \left( \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} g(x', s) dx' \right) ds + \frac{1}{2} \left( f(x + ct, 0) + f(x - ct, 0) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \dot{f}(x', 0) dx' \right) . \blacksquare$$

Bislang war die Aufgabenstellung so, daß wir für vorgegebene Anfangsbedingungen zur Zeit  $t_0 = 0$  die Wellengleichung  $\square f = g$  für Zeiten  $t \geq t_0$  zu lösen hatten. Wir lassen jetzt  $t_0$  gegen minus Unendlich streben und nehmen an, daß die Werte von  $f$  und  $\dot{f}$  in der fernen Vergangenheit verschwinden. Aus dem Resultat von Aufg. 4.2.4 folgt dann nach einer einfachen Substitution

$$f(x, t) = \frac{c}{2} \int_0^\infty \left( \int_{x-cs}^{x+cs} g(x', t-s) dx' \right) ds .$$

Hieran erkennen wir deutlich, daß  $f(x, t)$  nur von Quellen im Raumzeitgebiet  $C_{x,t}^- := \{(x_0, t_0) \mid |x - x_0| \leq c(t - t_0)\}$  beeinflusst wird (Abb. 4.5). Dieser Sachverhalt ist unter dem Namen *Kausalitätsprinzip* bekannt. Das Raumzeitgebiet  $C_{x,t}^-$  heißt der *rückwärts gerichtete Lichtkegel*.

*Aufgabe 4.2.5.* Konstruiere mit Hilfe dieses Resultats die Lösung von Bsp. 4.2.1.

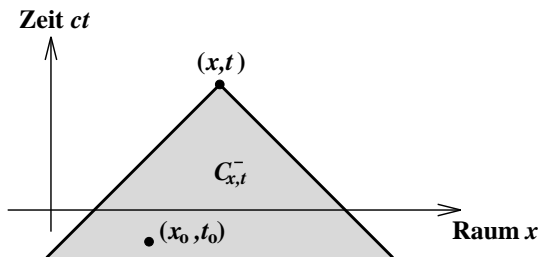


Abbildung 4.5. Rückwärts gerichteter Lichtkegel

## 4.3 Wellengleichung in drei Raumdimensionen

### 4.3.1 Lösung der homogenen Gleichung

In diesem Abschnitt bearbeiten wir die folgende Aufgabe:

Löse  $\square f = 0$  zu den Anfangswerten  
 $f(p, 0) = u(p)$  und  $\dot{f}(p, 0) = v(p)$ .

Beachte, daß die homogene Wellengleichung  $\square f = 0$  eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit ist, weshalb zur Anfangszeit sowohl  $f$  wie auch  $\dot{f}$  vorzugeben ist. Zur Lösung der Aufgabe benötigen wir zwei Hilfsätze und eine Definition.

*Hilfsatz 4.1.* Sei  $B_R$  die Kugel mit Radius  $R$  und Mittelpunkt im Koordinatensprung  $o$ . Außerdem sei  $S_R = \partial B_R$  die  $B_R$  berandende Sphäre und  $\tau$  die Raumwinkel-2-Form bzgl.  $o$ . Dann gilt



$$\frac{d}{dR} \int_{S_R} f \tau = \frac{1}{R^2} \int_{B_R} \star \Delta f$$

für jede (zweimal stetig differenzierbare) Funktion  $f$ .

*Beweis.* Die Greensche Funktion  $G(\bullet, p)$  des Gebietes  $U = B_R$  für  $p = o$  ist bekanntlich  $G(\bullet, o) = (r^{-1} - R^{-1})/4\pi$ . Jetzt kommt ein Trick: wir betrachten  $f$  als Lösung einer elektrostatischen Randwertaufgabe auf  $U = B_R$ ! Mit den Vorgaben  $-\star \Delta f|_U$  ("innere Ladungsdichte" für das Poisson-Problem auf  $U$ ) und  $f|_{\partial U}$  ("Randpotential" für das Dirichlet-Problem auf  $U$ ), gilt dann die Formel

$$f(o) = - \int_{B_R} G(\bullet, o) \star \Delta f - \int_{S_R} f \star dG(\bullet, o).$$

Da der Poisson-Kern  $-d \star G(\bullet, o)$  gleich  $\tau/4\pi$  ist, vereinfacht sich die Formel zu

$$\int_{S_R} f \tau = 4\pi f(o) + \int_{B_R} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \star \Delta f.$$

Durch Differenzieren nach  $R$  folgt dann die Behauptung des Hilfsatzes.

*Korollar (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen).* Eine Funktion  $f$  heißt *harmonisch*, wenn sie die Laplace-Gleichung  $\Delta f = 0$  erfüllt. Aus der letzten Gleichung resultiert dann die Aussage, daß der Funktionswert einer harmonischen Funktion  $f$  im Punkt  $o$  gleich ihrem Mittelwert über irgendeine um  $o$  zentrierte Sphäre  $S_R(o)$  ist:

$$f(o) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_R(o)} f \tau.$$

*Definition 4.1.* Es sei  $\tau_p$  die Raumwinkel-Form bezüglich des Punktes  $p$  und  $S_R(p)$  die Sphäre mit Mittelpunkt  $p$  und Radius  $R$ . Für eine Zeit  $t$  und irgendeine Funktion  $w : \text{Raum} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir die reelle Zahl  $\mathcal{M}(p, t)w$  durch

$$\mathcal{M}(p, t)w := \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} w \tau_p.$$

*Andere Darstellung von  $\mathcal{M}$ .* Der Operator  $\mathcal{M}(p, t)$  mittelt  $w$  über die Sphäre mit Mittelpunkt  $p$  und Radius  $ct$  und multipliziert anschließend mit  $t$ . Für manche Zwecke (siehe unten) ist folgende Alternativdarstellung nützlich. Wie in Abb. 4.6 illustriert, bilden wir die Einheitssphäre  $S$  um  $o$  auf die Sphäre  $S_{ct}(p)$  ab durch

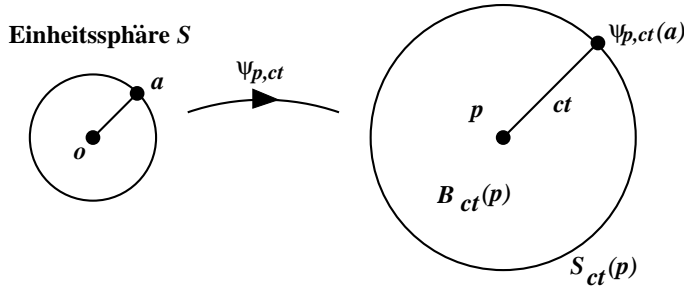
$$\psi_{p,ct}(a) = p + ct(a - o).$$

Hiermit können wir den Integranden  $w \tau_p$  nach  $S$  zurückholen:

$$\psi_{p,ct}^*(w \tau_p) = (w \circ \psi_{p,ct})(\psi_{p,ct}^* \tau_p).$$

Mit  $\psi_{p,ct}^* \tau_p = \tau$  folgt dann

$$\mathcal{M}(p, t)w = \frac{t}{4\pi} \int_{\psi_{p,ct}(S)} w \tau_p = \frac{t}{4\pi} \int_S (w \circ \psi_{p,ct}) \tau .$$



**Abbildung 4.6.** Die Abbildung  $\psi_{p,ct}$  schiebt den Koordinatenursprung  $o$  an den Punkt  $p$  und streckt dann um den Faktor  $ct$ .

*Hilfsatz 4.2.* Jede durch  $f(p, t) = \mathcal{M}(p, t)w$  erklärte Funktion  $f$  ist eine Lösung von  $\square f = 0$ .

*Beweis.* Unter Zuhilfenahme von Hilfsatz 4.1 differenzieren wir  $f$  einmal nach der Zeit:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(p, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} w \tau_p + \frac{1}{4\pi ct} \int_{B_{ct}(p)} \star \Delta w .$$

Für die Wellengleichung benötigen wir die zweite Zeitableitung von  $f$ , weshalb wir nochmal differenzieren müssen. Dabei entstehen auf der rechten Seite drei Terme, die von der Zeitabhängigkeit von  $S_{ct}(p)$  bzw.  $(ct)^{-1}$  bzw.  $B_{ct}(p)$  herrühren. Die ersten beiden heben sich als Konsequenz von Hilfsatz 4.1 gegenseitig auf, und es verbleibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(p, t) &= \frac{1}{4\pi c^3 t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_{ct}(p)} \star \Delta w \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \frac{\partial}{\partial(ct)} \int_{B_{ct}(p)} (\Delta w) r_p^2 dr_p \wedge \tau_p \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} (\Delta w) \tau_p . \end{aligned}$$

Hier wurden im zweiten Schritt Kugelkoordinaten bzgl. des Punktes  $p$  eingeführt, und das letzte Gleichheitszeichen berechnet die Ableitung nach  $R = ct$ . [Der letzte Schritt sollte intuitiv klar sein. Wer aber partout auf einer formalen Begründung besteht, der könnte z.B. wie folgt vorgehen. Sei  $X = r_p \partial_{r_p}$

das von  $p$  radial nach außen zeigende Vektorfeld mit Fluß  $\phi_s(a) = p + e^s(a-p)$  und Lie-Ableitung  $L_X$ . Dann gilt  $B_{\exp(s)R}(p) = \phi_s(B_R(p))$  und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \int_{B_R(p)} f dr_p \wedge \tau_p &= R^{-1} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{B_{\exp(s)R}(p)} f dr_p \wedge \tau_p = \\ &= \frac{1}{R} \int_{B_R(p)} L_X(f dr_p \wedge \tau_p) = \frac{1}{R} \int_{B_R(p)} d(r_p f \wedge \tau_p) = \int_{S_R(p)} f \tau_p . \end{aligned}$$

Mit  $f = (\Delta w)r_p^2/4\pi c^2 t$  und  $R = ct$  folgt dann das behauptete Gleichheitszeichen.] Insgesamt haben wir also

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(p, t) = \mathcal{M}(p, t)(\Delta w) .$$

Nun sieht man aus der obigen alternativen Darstellung von  $\mathcal{M}$  und  $((\Delta w) \circ \psi_{p,ct})(a) = (\Delta w)(p + ct(a-o))$  ohne Mühe, daß  $\mathcal{M}$  mit  $\Delta$  vertauscht. Damit erfüllt  $f(p, t) = \mathcal{M}(p, t)w$  die homogene Wellengleichung, und der Hilfsatz ist bewiesen.

*Satz 4.1.* Die Lösung der homogenen Wellengleichung  $\square f = 0$  zu den Anfangsdaten  $f(p, 0) = u(p)$  und  $\dot{f}(p, 0) = v(p)$  ist

$$f(p, t) = \mathcal{M}(p, t)v + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(p, t)u .$$

*Beweis.* Oben haben wir gezeigt, daß  $\mathcal{M}(p, t)w$  die homogene Wellengleichung  $\square f = 0$  löst. Da  $\square$  und  $\partial/\partial t$  vertauschen, ist mit  $\mathcal{M}(p, t)w$  auch  $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(p, t)w$  eine Lösung von  $\square f = 0$ . Es bleibt daher lediglich nachzuweisen, daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Zu  $f(p, 0)$  trägt wegen des Faktors  $t$  vor dem Integral in der Definition von  $\mathcal{M}$  nur  $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(p, t)u$  bei:

$$f(p, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} t \int_{S_{ct}(p)} u \tau_p = u(p) .$$

Für die Ableitung  $\dot{f}(p, 0)$  finden wir analog

$$\dot{f}(p, 0) = v(p) + \frac{1}{2\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{ct}(p)} u \tau_p .$$

Der Satz ist bewiesen, sobald wir das Verschwinden des zweiten Terms auf der rechten Seite gezeigt haben. Daß dieser verschwindet, sieht man folgendermaßen. Für kurze Zeiten  $t$  haben wir die Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} (u \circ \psi_{p,ct})(a) &= u(p + ct(a-o)) \\ &= u(p) + ct(du)_p(a-o) + \mathcal{O}(t^2) \\ &= u(p) + ct \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x^i}(p) x^i(a) + \mathcal{O}(t^2) . \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{ct}(p)} u \tau_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (u \circ \psi_{p,ct}) \tau = c \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x^i}(p) \int_S x^i \tau = 0,$$

wobei der letzte Ausdruck verschwindet, weil aus Symmetriegründen gilt  $\int_S x^i \tau = 0$ .

*Huygens'sches Prinzip. Huygens...*

### 4.3.2 Abruptes Abschalten eines Kreisstroms

Der stationäre Strom  $I$  einer Leiterschleife werde zur Zeit  $t = 0$  abrupt abgeschaltet. Es kommt dann aufgrund der zeitlichen Änderung des Stromes zur Abstrahlung eines elektromagnetischen Signals, dessen elektrischen Anteil wir hier berechnen wollen.

Wegen der Abruptheit des Ausschaltvorganges können wir das Problem als Anfangswertaufgabe formulieren. Das geht folgendermaßen. Die elektrische Feldstärke genügt der inhomogenen Wellengleichung  $\square E = -\mu_0 \star \partial j / \partial t$  (die Ladungsdichte  $\rho$  soll hier verschwinden). Diese Gleichung integrieren wir über ein infinitesimales Zeitintervall:

$$\frac{1}{c^2} \dot{E} \Big|_{t=\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon) = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} (\square E) dt = -\mu_0 \star \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial j}{\partial t} dt = \mu_0 \star j \Big|_{t=-\epsilon}.$$

Dabei wurde verwendet, daß  $\dot{E}$  vor dem Abschalten ( $t < 0$ ) und  $j$  nach dem Abschalten ( $t > 0$ ) verschwindet. Es gelten also die Anfangsbedingungen

$$E \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{E} \Big|_{t=0+} = \varepsilon_0^{-1} \star j \Big|_{t=0-}.$$

In der üblichen kartesischen Basis setzen wir jetzt  $\star j|_{t=0-} =: \sum_{k=1}^3 j_k dx^k$ . Nach Satz 4.1 haben wir dann für die elektrische Feldstärke den Ausdruck  $E_k(p, t) = \mathcal{M}(p, t) j_k / \varepsilon_0$ .

Nun liege die Leiterschleife speziell in der  $xy$ -Ebene und sei kreisförmig mit Mittelpunkt  $o$  und Radius  $R$ . Um  $E_k(p, t) = \mathcal{M}(p, t) j_k / \varepsilon_0$  zu berechnen, legt man eine Sphäre  $S_{ct}(p)$  um den Punkt  $p$  mit Radius  $ct$  (Abb. 4.7) und wertet das Integral  $E_k(p, t) = (t/4\pi\varepsilon_0) \int_{S_{ct}(p)} j_k \tau_p$  aus.

*Aufgabe 4.3.1. Zeige das folgende:*

1.  $E$  verschwindet auf der  $z$ -Achse für alle Zeiten.
2. In der Zylinderbasis  $\partial_r, \partial_\varphi$  und  $\partial_z$  verschwinden die Komponenten  $E_r$  und  $E_z$  überall zu allen Zeiten.
3. In der  $xy$ -Ebene gilt

$$E = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c} \times \frac{(R^2 + r^2 - c^2 t^2) d\varphi}{\sqrt{R^2 - (ct - r)^2} \sqrt{(ct + r)^2 - R^2}}$$

für  $|ct - r| < R$ , und Null sonst. (Skizze des Ergebnisses als Funktion von  $t$ )

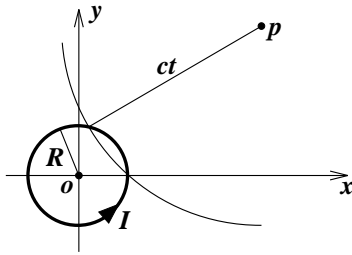


Abbildung 4.7.

### 4.3.3 Lösung der inhomogenen Gleichung

Mit all den getroffenen Vorbereitungen ist es jetzt leicht, die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung zu konstruieren. Dazu betrachten wir zunächst die Anfangswertaufgabe  $\square f = g$  (für  $t > 0$ ) mit  $f(p, 0) = 0$  und  $\dot{f}(p, 0) = 0$ . In völliger Analogie zu dem in Abschn. 4.2 behandelten eindimensionalen Fall zeigt man

$$f(p, t) = c \int_0^t h_s(p, t) ds ,$$

wobei  $h_s$  für  $t > s$  durch die homogene Wellengleichung  $\square h_s = 0$  bestimmt wird und den Anfangsbedingungen  $h_s(p, t)|_{t=s} = 0$  und  $\frac{1}{c} \dot{h}_s(p, t)|_{t=s} = g(p, s)$  genügt. Mit Satz 4.1 können wir  $h_s$  sofort angeben:

$$h_s(p, t) = c \mathcal{M}(p, t - s) g(\bullet, s) .$$

Einsetzen in den Ausdruck für  $f$  ergibt:

$$\begin{aligned} f(p, t) &= c^2 \int_0^t \mathcal{M}(p, t - s) g(\bullet, s) ds \\ &= c^2 \int_0^t \mathcal{M}(p, s) g(\bullet, t - s) ds = \frac{c^2}{4\pi} \int_0^t \left( \int_{S_{cs}(p)} g(\bullet, t - s) \tau_p \right) s ds . \end{aligned}$$

Nun benützen wir  $cs = r_p|_{S_{cs}(p)}$  und

$$r_p dr_p \wedge \tau_p = r_p^{-1} dx \wedge dy \wedge dz =: r_p^{-1} dV .$$

Es folgt dann die Formel

$$f(p, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_{ct}(p)} \frac{g(\bullet, t - r_p(\bullet)/c)}{r_p(\bullet)} dV .$$

Durch Hinzufügen der Lösung der homogenen Gleichung bekommen wir für die Lösung der Gleichung  $\square f = g$  zu den allgemeinen Anfangsbedingungen  $f(p, 0) = u(p)$ ,  $\dot{f}(p, 0) = v(p)$  das Ergebnis

$$f(p, t) = \mathcal{M}(p, t)v + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(p, t)u + \frac{1}{4\pi} \int_{B_{ct}(p)} \frac{g(\bullet, t - r_p(\bullet)/c)}{r_p(\bullet)} dV .$$

Wählen wir die Anfangsbedingungen  $f(p, t_0) = 0 = \dot{f}(p, t_0)$  zur Zeit  $t_0 \rightarrow -\infty$ , so resultiert

$$f(p, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{g(\bullet, t - r_p/c)}{r_p} dV .$$

*Interpretation.* Diese Formel merken wir uns wie folgt. Wir haben uns vorzustellen, daß zur Zeit  $t'$  am Ort  $p'$  ein sphärischer Puls (“Seifenblase”) mit Amplitude  $g(p', t')$  erzeugt wird. (Ist  $g(p', t') = 0$ , so wird nichts erzeugt.) Dieser Puls breitet sich (ohne seine Form zu verändern) mit Lichtgeschwindigkeit isotrop aus, wobei seine Amplitude wie der inverse Abstand abnimmt. Er trifft zur Zeit  $t = t' + |p - p'|/c$  am Ort  $p$  ein und trägt zum Funktionswert  $f(p, t)$  bei. Zur Berechnung von  $f(p, t)$  ist über alle “Quellereignisse”  $(p', t')$  zu summieren [gewichtet mit  $g(p', t')$ ], die auf dem *Mantel* (oder Rand)

$$\partial C_{p,t}^- := \left\{ (p', t') \mid |p - p'| = c(t - t') \right\}$$

des rückwärts gerichteten Lichtkegels  $C_{p,t}^-$  liegen,

$$C_{p,t}^- := \left\{ (p', t') \mid |p - p'| \leq c(t - t') \right\} .$$

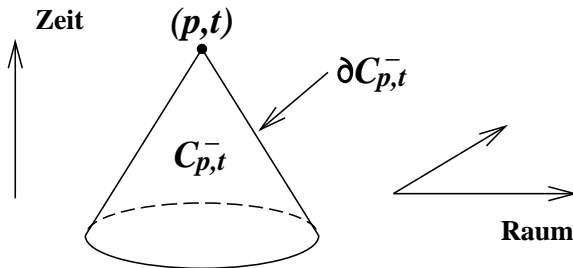


Abbildung 4.8. Mantel des rückwärts gerichteten Lichtkegels

#### 4.4 Elektrische Dipolstrahlung

Als konkrete Anwendung der Ergebnisse von Abschn. 4.3.3 berechnen wir das Strahlungsfeld einer räumlich lokalisierten und harmonisch oszillierenden Quelle in elektrischer Dipolnäherung. Die Strahlungsquelle befinde sich innerhalb einer um den Koordinatenursprung zentrierten Kugel  $B_R$  mit Radius  $R$ . Sie sei elektrisch neutral, habe aber ein endliches elektrisches Dipolmoment.

Unser erstes Ziel wird es sein, die magnetische Erregung  $H$  zu berechnen. Sie genügt der inhomogenen Wellengleichung  $\square H = -\delta j = \star d \star j$ , deren Lösung durch

$$H_k(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} (\star d \star j)_k(\bullet, t - r_p/c) r_p^{-1} dV$$

ausgedrückt wird. Wir beginnen mit der folgenden Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} (\star d \star j)_k dV &= \partial_k \lrcorner (\star d \star j) dV = (\partial_k \lrcorner dV) \wedge \star d \star j \\ &= (d \star j) \wedge \star (\partial_k \lrcorner dV) = d \star j \wedge dx_k = d(\star j \wedge dx_k) . \end{aligned}$$

Die Zeitabhängigkeit von Strom- und Ladungsverteilung sei jetzt harmonisch:  $j = \tilde{j} \sin \omega t$  und  $\rho = \tilde{\rho} \cos \omega t$ , mit zeitunabhängigem  $\tilde{j}$ ,  $\tilde{\rho}$ . Hiermit wird die Gleichung für  $H_i$  zu

$$H_i(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \frac{\sin(\omega t - kr_p)}{r_p} d(\star \tilde{j} \wedge dx_i) ,$$

wobei  $k = \omega/c$  gesetzt wurde. Wir werden sehen, daß  $\lambda = k^{-1}$  die Wellenlänge der emittierten Strahlung ist.

Die weitere Rechnung führen wir unter den Bedingungen  $R \ll \lambda \ll r(\mathbf{p})$  durch. Die Ungleichung  $R \ll \lambda$  bedeutet den Grenzfall großer Wellenlängen, und  $\lambda \ll r(\mathbf{p})$  definiert den Bereich der *Fernzone*. Für einen Punkt  $a \in B_R$  dürfen wir wegen  $R \ll r(\mathbf{p})$  die Taylor-Entwicklung des Abstandes  $r_p(a) = |p - a|$  nach der ersten Ordnung abbrechen:

$$r_p(a) = r(\mathbf{p}) - \frac{x^j(\mathbf{p})}{r(\mathbf{p})} x_j(a) + \mathcal{O}(R^2/r(\mathbf{p})) .$$

[Ab hier bedienen wir uns wieder der Einsteinschen Summenkonvention.] Damit gehen wir nun in den Ausdruck  $\sin(\omega t - kr_p)/r_p$ :

$$\frac{\sin(\omega t - kr_p)}{r_p} = \frac{\sin(\omega t - kr(\mathbf{p}))}{r(\mathbf{p})} + \frac{\cos(\omega t - kr(\mathbf{p}))}{r(\mathbf{p})} \times \frac{x^j(\mathbf{p})}{r(\mathbf{p})} kx_j + \dots .$$

Die Entwicklung der Sinusfunktion im Zähler wurde nach dem ersten Korrekturglied abgebrochen. Diese Näherung eliminiert Beiträge zum Strahlungsfeld, die von höherer Ordnung in der kleinen Größe  $kR \ll 1$  sind (Langwellenlimes). Die Ersetzung von  $r_p$  durch den konstanten Wert  $r(\mathbf{p})$  im Nenner ist zulässig in der Fernzone. Mit einer partiellen Integration folgt jetzt

$$H_i(\mathbf{p}, t) = -\frac{\cos(kr(\mathbf{p}) - \omega t)}{r(\mathbf{p})} \times \frac{kx^j(\mathbf{p})}{4\pi r(\mathbf{p})} \int_{B_R} dx_i \wedge dx_j \wedge \star \tilde{j} .$$

Nach einer weiteren Nebenrechnung,

$$dx_i \wedge dx_j \wedge \star \tilde{j} = \tilde{j} \wedge \star(dx_i \wedge dx_j) = \epsilon_{ijk} \tilde{j} \wedge dx^k$$

[ $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$  usw. ist der total antisymmetrische Tensor in drei Dimensionen], läßt sich das verbleibende Integral durch das elektrische Dipolmoment  $\mathbf{II}$  der Quelle ausdrücken:

$$\int_{B_R} dx^k \wedge \tilde{j} = - \int_{B_R} x^k dx^j = -\omega \int_{B_R} x^k \tilde{\rho} = -\omega \Pi^k .$$

Hier wurde für das zweite Gleichheitszeichen benützt, daß nach der Kontinuitätsgleichung ( $\dot{\rho} + dj = 0$ ) gilt  $d\tilde{j} = \omega\tilde{\rho}$ . Es folgt

$$H(\bullet, t) = k\omega \frac{\cos(kr - \omega t)}{4\pi r} \epsilon_{ijk} dx^i \frac{x^j}{r} \Pi^k .$$

Der Ausdruck  $\epsilon_{ijk} x^i dx^j \wedge dx^k / 2r^3$  ist die kartesische Koordinatendarstellung der Raumwinkel-2-Form  $\tau$ , so daß gilt

$$\epsilon_{ijk} dx^i \frac{x^j}{r} \Pi^k = -i_\Pi \left( \epsilon_{ijk} \frac{x^j dx^i \wedge dx^k}{2r} \right) = i_\Pi r^2 \tau .$$

Wir führen die Kugelflächen-2-Form  $dS := r^2 \tau$  ein und haben damit das Resultat

$$H = k\omega \frac{\cos(kr - \omega t)}{4\pi r} i_\Pi dS .$$

Hier steckt noch irgendwo ein Vorzeichenfehler.

Ausgehend von der inhomogenen Wellengleichung für die elektrische Feldstärke,

$$\square E = -\frac{1}{\epsilon_0} d \star \rho - \mu_0 \star \frac{\partial j}{\partial t} ,$$

zeigt man mit dem Zwischenergebnis

$$E_i(p, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \frac{\cos(\omega t - kr_p)}{r_p} (-\epsilon_0^{-1} d \star \tilde{\rho} - \mu_0 \star \tilde{j})_i dV$$

durch eine ähnliche Rechnung wie für  $H$  das Resultat

$$E = \mu_0 \omega^2 \frac{\cos(kr - \omega t)}{4\pi r} (\langle \Pi, \partial_r \rangle dr - \langle \Pi, \bullet \rangle) .$$

Der Term  $\langle \Pi, \partial_r \rangle dr$  kommt vom Ladungsanteil der Quelle, der Term  $\langle \Pi, \bullet \rangle$  vom Stromanteil. (Achtung! Für den Ladungsanteil ist der Kosinus bis zur zweiten Ordnung in  $k^2$  zu entwickeln!)

Wir legen jetzt das Dipolmoment speziell in  $z$ -Richtung ( $\Pi = |\Pi| e_z$ ) und führen Kugelkoordinaten  $r, \theta, \varphi$  ein. Aus  $\partial_z = \cos \theta \partial_r - r^{-1} \sin \theta \partial_\theta$  folgt  $i_\Pi dS = -|\Pi| r \sin^2 \theta d\varphi$  und

$$\begin{aligned} \langle \Pi, \bullet \rangle - \langle \Pi, \partial_r \rangle dr &= |\Pi| dz - |\Pi| \cos \theta dr \\ &= |\Pi| (d(r \cos \theta) - (dr) \cos \theta) = -|\Pi| r \sin \theta d\theta . \end{aligned}$$

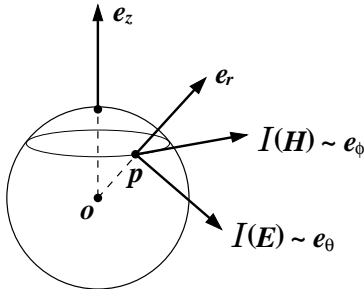
Für diese Wahl der Richtung des Dipolmoments haben wir also

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} |\Pi| \frac{\sin \theta}{r} \cos(kr - \omega t) r d\theta , \\ H &= \frac{k\omega}{4\pi} |\Pi| \frac{\sin \theta}{r} \cos(kr - \omega t) r \sin \theta d\varphi . \end{aligned}$$



*Diskussion.*

- Wir ordnen der 1-Form  $E$  durch den kanonischen Isomorphismus  $\mathcal{I}$  das Vektorfeld  $\mathcal{I}(E) = (E, \bullet)$  zu. Für  $H$  verfahren wir genauso. Die nach außen gerichtete Kugelnormale  $\partial_r$ , die die Ausbreitungsrichtung der Strahlung beschreibt, und die Vektorfelder  $\mathcal{I}(E) \sim \partial_\theta$  und  $\mathcal{I}(H) \sim \partial_\phi$  bilden dann ein rechtshändiges Orthonormalsystem.



**Abbildung 4.9.** Zur Ausbreitung der abgestrahlten Welle

- $E$  und  $H$  verschwinden auf der Polarachse des Dipols (Faktor  $\sin \theta!$ ) und sind in der Äquatorialebene maximal. Diese Variation mit dem Sinus des Polarwinkels ist charakteristisch für das Strahlungsfeld eines elektrischen Dipols. (Höhere Multipolmomente wurden durch die Langwellennäherung eliminiert. Sie haben übrigens eine andere Winkelverteilung.)
- Die zeitgemittelte Poynting-2-Form ist mit  $\langle \cos^2(\dots) \rangle = 1/2$  gleich

$$\langle E \wedge H \rangle = \frac{k^3 \omega \tau}{32\pi^2 \epsilon_0} |\Pi|^2 \sin^2 \theta .$$

Integration liefert die gesamte abgestrahlte Leistung  $\mu_0 |\Pi|^2 \omega^4 / 12\pi c$ . Beachten Sie die starke Frequenzabhängigkeit!

*Aufgabe 4.4.1.* Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung

## 4.5 Strahlung einer beschleunigten Punktladung

Hier könnte man zunächst mit Hilfe des Flußlinienbildes die Bremsstrahlung einer Punktladung diskutieren (siehe Thirring). Anschließen würde sich dann die exakte analytische Theorie. Denkbar wäre auch, diesen Abschnitt vor dem über die elektrische Dipolstrahlung einzuschieben und auf diese Weise die dort etwas längliche Rechnung abzukürzen.

## 4.6 Beugungsphänomene

Ein ehrgeiziges Ziel wäre, Sommerfelds Lösung für die Beugung am Keil zu präsentieren. Dazu benötigt man aber wohl mehr Funktionentheorie und komplexe Analysis als hier zur Verfügung steht.

## 4.7 Symmetrien und Erhaltungssätze

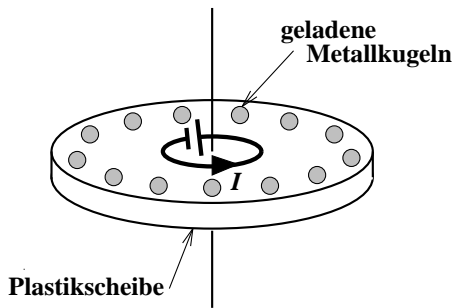
In Vorbereitung des nächsten Abschnitts wäre hier noch -- nach dem Skript vom Sommersemester 1993 -- die Herleitung des Impuls- und Drehimpulssatzes zu geben. Dieses Thema wird im relativistischen Kapitel wieder aufgegriffen und dort prägnanter behandelt.

## 4.8 Das Feynmansche Paradoxon

*Feynman im Original.* "Betrachte die in Abb. 4.10 gezeigte Apparatur. Eine Achse trägt in zu ihr senkrechter und konzentrischer Anordnung eine dünne, kreisförmige Plastikscheibe. Die Achse ist hervorragend gelagert, sodaß die Scheibe ohne Reibungsverluste rotieren kann. Auf der Scheibe befindet sich ein Draht in Form einer konzentrisch zur Drehachse angeordneten Spule. Diese Spule trägt einen stationären Strom  $I$ , der einer kleinen, ebenfalls auf der Scheibe montierten Batterie entnommen wird. In der Nähe des Scheibenrandes befinden sich in gleichmäßiger Anordnung viele kleine Metallkugeln, die durch das Plastik der Scheibe voneinander und von der Spule elektrisch isoliert sind. Jede Metallkugel trägt die gleiche elektrische Ladung  $q$ . Alles ist stationär, und die Scheibe ruht. Nun wollen wir annehmen, daß durch Zufall – oder Planung – der Strom in der Spule zum Erliegen gebracht wird, und zwar *ohne irgendeine äußere Einwirkung*. Solange der Strom fließt, existiert ein magnetischer Fluß, der auf der Spule so ungefähr senkrecht steht. Dieser magnetische Fluß muß verschwinden, wenn der Strom gestoppt wird. Es wird deshalb ein elektrisches Feld induziert, das um Kreise mit Mittelpunkt auf der Drehachse zirkuliert. Die geladenen Kugeln spüren dann ein zum Scheibenrand tangenciales elektrisches Feld. Die elektrische Kraft hat für alle Kugeln denselben Drehsinn, was in einem an der Scheibe angreifenden totalen Drehmoment resultiert. Wir würden aufgrund dieser Argumente erwarten, daß die Scheibe mit dem Verschwinden des Stromes in der Spule zu rotieren beginnt...

Wir könnten jedoch auch anders argumentieren. Da der Drehimpuls der Scheibe mit all ihrem Zubehör zu Anfang verschwindet, könnten wir unter Verwendung des Prinzips der Drehimpulserhaltung sagen, daß der Drehimpuls der gesamten Anordnung für alle Zeiten Null bleiben muß. Die Scheibe sollte also nach dem Abschalten des Stromes in Ruhe verweilen. Welches der

beiden Argumente ist korrekt? Wird die Scheibe in Rotation versetzt oder nicht?...” (Ende des Zitats.)



**Abbildung 4.10.** Die Feynmansche Anordnung (die Spule ist vereinfacht als Kreisstrom dargestellt)

Feynman fügt hinzu, daß die korrekte Antwort nicht von irgendwelchen unwesentlichen Begleitumständen wie zum Beispiel der asymmetrischen Position der Batterie abhängt. Die Abgeschlossenheit des Systems, d.h. das Abschalten des Stromes ohne eine den Drehimpuls ändernde äußere Einwirkung, könne man zum Beispiel durch folgende ideale Situation erreichen. Die Spule sei aus einem supraleitenden Draht gewickelt, in dem ein Strom fließe. Nachdem man die Anordnung sorgfältig in den Ruhezustand versetzt hat, lasse man die Temperatur langsam ansteigen. Sobald die Übergangstemperatur zwischen supraleitendem und normalleitendem Zustand erreicht ist, wird der Strom in der Spule durch den Widerstand des Drahtes zum Erliegen gebracht. Wie zuvor sinkt der magnetische Fluß ab, und es wird ein elektrisches Feld induziert. Abschließend warnt Feynman den Leser, daß die Auflösung des Rätsels weder leicht noch ein Trick sei, sondern zur Entdeckung eines wichtigen Prinzips des Elektromagnetismus führe.

Wir nehmen vorweg, daß die erste Antwort die richtige ist: die Scheibe befindet sich nach dem Abklingen des Stromes tatsächlich in Rotationsbewegung. Unsere Aufgabe wird es demnach sein, die Drehimpulsbilanz in Ordnung zu bringen. Zunächst einmal fragt man sich, ob der mechanische Drehimpuls der in der Spule umlaufenden Elektronen wesentlich sein könnte. Dazu ist zu bemerken, daß der Drehsinn der durch die Wirkung des induzierten elektrischen Feldes in Rotation versetzten Scheibe vom Vorzeichen der Ladungen  $q$  auf den Metallkugeln abhängt. Deshalb wird das Defizit in der mechanischen Drehimpulsbilanz durch Hinzunahme des Drehimpulses der Elektronen entweder größer oder kleiner gemacht, je nachdem ob  $q$  positiv oder negativ ist. Zudem können wir durch Vergrößern der gesamten Ladung auf den Metallkugeln das angreifende Drehmoment - und damit auch den Drehimpuls der rotierenden Scheibe - variieren, während der Drehimpuls der Elektronen fest bleibt. Wir entnehmen diesen Überlegungen, daß der me-

chanische Drehimpuls der in der Spule umlaufenden Elektronen einer der im Feynmanschen Sinn *unwesentlichen* Begleitumstände des Rätsels ist und vernachlässigt werden kann.<sup>1</sup>

*Auflösung des Rätsels.* Um das Defizit in der mechanischen Drehimpulsbilanz zu kompensieren, werden wir den Drehimpuls im elektromagnetischen Feld heranziehen müssen. Leider ist eine quantitative Analyse des von Feynman beschriebenen Vorgangs schwierig. Wir nehmen deshalb eine Vereinfachung vor, indem wir das System unter Translationen in Richtung der Drehachse invariant machen. (Wir stellen uns zum Beispiel vor, es seien sehr viele identische Scheiben von der beschriebenen Form übereinander gestapelt.) Insbesondere ersetzen wir die ringförmige Anordnung von Metallkugeln durch einen gleichmäßig mit Flächenladung bedeckten Zylindermantel. Diese Abstraktion wird nicht nur das Rechnen erleichtern, sondern auch den Blick auf das Wesentliche des Problems lenken.

Wir führen gewöhnliche Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  ein und legen die Symmetrieachse der Anordnung auf die  $z$ -Achse. Mit  $u \in \Lambda^3(E_3)$  bezeichnen wir die Dichte der  $z$ -Komponente des Drehimpulses im elektromagnetischen Feld. Aus dem vorangehenden Abschnitt kennen wir die Formel  $u = -B \wedge \partial_\varphi \lrcorner D$ , wobei  $\partial_\varphi$  das durch die Gleichungen  $(dr)(\partial_\varphi) = 0$ ,  $(d\varphi)(\partial_\varphi) = 1$  und  $(dz)(\partial_\varphi) = 0$  bestimmte Vektorfeld ist. ( $\partial_\varphi$  erzeugt Drehungen um die  $z$ -Achse.) Im ersten Schritt untersuchen wir die statischen Situationen vor dem Zusammenbruch des Stromes zur Zeit  $t = 0$  und lange danach. Vorher existiert ein magnetisches Feld innerhalb der Spule und ein elektrisches Feld außerhalb des geladenen Zylindermantels. Da die Raumbereiche, wo die Felder von Null verschieden sind, nicht überlappen, gilt  $u|_{t < 0} = 0$ , d.h. für  $t < 0$  steckt im elektromagnetischen Feld kein Drehimpuls. Die Situation für  $t \gg 0$  ist ähnlich. Zwar erzeugen die Ladungen des rotierenden Zylindermantels jetzt ein statisches Magnetfeld, das bis an ihn heranreicht, aber es entsteht trotzdem kein Überlapp, denn das elektrische Feld ist ja erst außerhalb des Mantels von Null verschieden. Diese Überlegungen führen zwingend zu dem Schluß, daß sich der fehlende Drehimpuls in dem elektromagnetischen Puls verbirgt, der durch den zusammenbrechenden Strom erzeugt und radial nach außen abgestrahlt wird. Wir gelangen hiermit zu der intuitiven Vorstellung, daß der Puls auf dem Weg nach außen von den geladenen Metallkugeln in seiner Richtung ein wenig *abgelenkt* wird (Abb. 4.11). Dadurch wird auf ihn ein Drehimpuls übertragen, der sich mit dem mechanischen Drehimpuls des rotierenden Zylinders zu Null addiert. Die Richtigkeit dieser Vorstellung gilt es nun rechnerisch nachzuweisen.

*Quantitative Rechnung.* Für die Berechnung des Feld-Drehimpulses durch Integration von  $-B \wedge \partial_\varphi \lrcorner D$  über den gesamten Raum benötigen wir die

<sup>1</sup> Es sind ideale Anordnungen denkbar, wo der mechanische Drehimpuls zu Anfang exakt gleich Null ist. Zum Beispiel könnten wir uns die Spule durch einen Elektron-Positron-Speicherring ersetzt denken, in dem die Elektronen und Positronen mit gleicher Dichte und umgekehrter Richtung umlaufen.

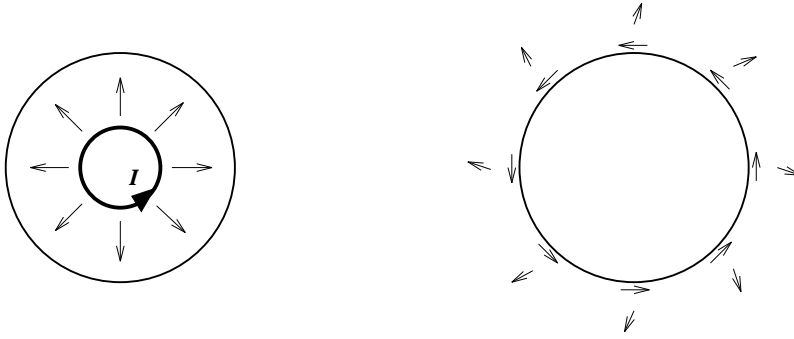


Abbildung 4.11. Drehimpuls der Scheibe und des Feldes

1-Form  $\partial_\varphi \lrcorner D$ . Nun wissen wir aus Gleichung (??) von Abschn. 4.1, daß die dynamisch induzierte elektrische Erregung  $D_{\text{ind}}$  die Zeitableitung der Stromdichte  $j$  zur Quelle hat. Da im vorliegenden Fall nur die  $zr$ -Komponente von  $j$  ungleich Null ist, folgt  $\partial_\varphi \lrcorner D_{\text{ind}} = 0$ . Der Feld-Drehimpuls wird demnach aus dem (dynamischen) Magnetfeld in Kombination mit der durch den geladenen Zylindermantel verursachten *statischen* elektrischen Erregung gebildet. Ist  $R$  der Radius des Zylindermantels,  $Q$  seine gesamte Ladung und  $L$  seine Länge in  $z$ -Richtung, so haben wir mit der Stufenfunktion  $h(s) = 1$  (bzw.  $h(s) = 0$ ) für  $s > 0$  (bzw.  $s < 0$ ) für den statischen Anteil von  $D$  den Ausdruck

$$D_{\text{stat}} = \frac{Q}{2\pi L} h(r - R) d\varphi \wedge dz.$$

Wir bilden  $\partial_\varphi \lrcorner D_{\text{stat}}$ , setzen in  $-B \wedge \partial_\varphi \lrcorner D$  ein und integrieren über den Raum. Das Integral über  $z$  läßt sich trivial ausführen und gibt einen Faktor  $L$ , der sich gegen den Faktor  $L$  im Nenner wegekürzt. Es verbleibt das Flächenintegral über eine zur  $z$ -Achse senkrechte Ebene. Wir definieren  $E_2 = \{a \in E_3 | z(a) = 0\}$  und  $D_R = \{a \in E_2 | r(a) < R\}$ . Das Ergebnis für die  $z$ -Komponente des Drehimpulses im elektromagnetischen Feld lautet dann

$$-\int_{E_3} B \wedge \partial_\varphi \lrcorner D = -\frac{Q}{2\pi} \int_{E_2} h(r - R) B = -\frac{Q}{2\pi} \int_{E_2 - D_R} B.$$

Dieses Resultat ist für alle Zeiten gültig. Wie oben schon bemerkt wurde, verschwindet der Feld-Drehimpuls für  $t < 0$ , weil  $B|_{E_2 - D_R}$  in diesem Fall gleich Null ist. Zum schnelleren Vergleich mit dem noch zu berechnenden mechanischen Drehimpuls formen wir unser Resultat für Zeiten  $t = T > 0$  um. Da  $E_2$  keinen Rand hat, erhalten wir aus dem Induktionsgesetz zusammen mit dem Stokesschen Satz die Beziehung  $\int_{E_2} \dot{B} = -\int_{E_2} dE = -\int_{\partial E_2} E = 0$ , d.h. der magnetische Fluß durch die gesamte Ebene  $E_2$  ist zeitlich konstant. Es folgt insbesondere

$$\int_{E_2} B|_{t=T} = \int_{E_2} B|_{t=0} = \int_{D_R} B|_{t=0}.$$

Die durch das zweite Gleichheitszeichen vorgenommene Einschränkung der Integrationsfläche ist zulässig, weil  $D_R$  den Querschnitt der Spule enthält. Insgesamt ergibt sich für die  $z$ -Komponente des Feld-Drehimpulses nach dem Abklingen des Stromes das Resultat

$$-\int_{E_3} \mathbf{B} \wedge \partial_\varphi \lrcorner D|_{t=T} = \frac{Q}{2\pi} \left( \int_{D_R} B|_{t=T} - \int_{D_R} B|_{t=0} \right).$$

Wir werden nun zeigen, daß sich dieser Ausdruck mit dem Drehimpuls des rotierenden Zylinders exakt zu Null addiert. Das am Zylindermantel mit Radius  $R$  angreifende Drehmoment  $\mathcal{D}$  ist gleich dem Produkt aus Gesamtladung  $Q$  und  $\varphi$ -Komponente der elektrischen Feldstärke  $E|_{\partial D_R}$ . (Die Lorentz-Kraft wirkt in Radialrichtung und trägt zum Drehmoment bezüglich der  $z$ -Achse nicht bei.) Da wir für die auf  $\partial D_R$  konstante Funktion  $E_\varphi$  auch  $\int_{\partial D_R} E/2\pi$  schreiben können, haben wir

$$\mathcal{D} = \frac{Q}{2\pi} \int_{\partial D_R} E = -\frac{Q}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_R} B,$$

wobei für das zweite Gleichheitszeichen nochmals das Induktionsgesetz benutzt wurde. Den mechanischen Drehimpuls erhalten wir durch Integration des Drehmoments über die Zeit. Es resultiert

$$\int_0^T \mathcal{D}(t) dt = -\frac{Q}{2\pi} \left( \int_{D_R} B|_{t=T} - \int_{D_R} B|_{t=0} \right),$$

wie angekündigt. Die Drehimpulsbilanz stimmt.

*Aufgabe 4.8.1.* Unsere Rechnung illustriert die Gültigkeit des Drehimpulsatzes, läßt aber die Frage offen, wie groß die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist, mit der die Anordnung nach dem Abklingen des Stromes rotiert. Nimm das Trägheitsmoment des Zylinders als bekannt an und berechne  $\omega$  für Zeiten  $t \gg 0$ .

## 4.9 Geometrische Optik

Wie wär's mit noch etwas Geometrischer Optik?

## 5. Relativistisch kovariante Theorie

Die spezielle Relativitätstheorie wird in ihren Grundzügen als bekannt vorausgesetzt und in Abschn. 5.1 und 5.2 kurz zusammengefaßt.

### 5.1 Der Minkowski-Raum $M_4$

*Definition 5.1.* Der Minkowski-Raum  $M_4$  ist ein orientierter, affiner, vierdimensionaler Raum mit Lorentzischem Skalarprodukt  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  auf seinem Differenzvektorraum  $\mathbb{R}^4$ .

*Bemerkungen.*

1. Die Elemente von  $M_4$  sind "Weltpunkte" oder "Ereignisse". Ein Beobachter ordnet jedem Ereignis drei Raumkoordinaten und eine Zeitkoordinate zu. Ereignisse haben aber eine invariante, d.h. von den speziellen Raum-Zeit-Koordinaten losgelöste Bedeutung.
2. Die affine Struktur von  $M_4$  macht Geraden  $s \mapsto a + sv$  ( $a \in M_4$ ,  $v \in \mathbb{R}^4$  fest,  $s \in \mathbb{R}$  variabel) zu einem wohldefinierten und invarianten Begriff. Eine solche Gerade in  $M_4$  (mit  $\langle v, v \rangle \leq 0$ ) wird als gleichförmig geradlinige Bewegung interpretiert.
3. Ein Lorentzisches Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist eine quadratische Form:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ u, v &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

mit Normalform  $\langle u, v \rangle = -u^0 v^0 + \sum_{i=1}^n u^i v^i$ .

4. Der Minkowski-Raum  $M_4$  ist ein gutes Modell der physikalischen Raum-Zeit, wenn die Krümmungseffekte der Gravitation vernachlässigt werden können.

*Definition 5.2.* Unter einem *Inertialsystem* versteht man ein affines Koordinatensystem  $\{o; e_0, e_1, e_2, e_3\}$  von  $M_4$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\langle e_\mu, e_\nu \rangle = 0$  für  $\mu \neq \nu$ .
2.  $\langle e_0, e_0 \rangle = -1$  und  $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = +1$ .
3. Mit der Dualbasis  $\{\theta^\mu\}_{\mu=0,\dots,3}$  zu  $\{e_\nu\}_{\nu=0,\dots,3}$  ist die Orientierung von  $M_4$  durch  $\sigma = \theta^0 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$  gegeben.

*Bemerkungen.*

1.  $e_0$  definiert die Zeitachse  $s \mapsto o + se_0$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) des Inertialsystems, und die Vektoren  $e_1, e_2, e_3$  spannen den Raum auf.
2. Die Zerlegung nach Raum und Zeit ist nicht invariant: ein anderes Inertialsystem macht eine andere Zerlegung. Zwei Ereignisse  $a$  und  $b$  werden im Inertialsystem  $\{o; e_0, \dots, e_3\}$  genau dann als gleichzeitig wahrgenommen, wenn gilt  $\theta^0(a - b) = 0$ . In einem anderen Inertialsystem  $\{o'; e'_0, \dots, e'_3\}$  gilt im allgemeinen  $\theta^{0'}(a - b) \neq 0$ , d.h.  $a$  und  $b$  finden nicht gleichzeitig statt.
3. Die korrekte Orientierung des Basissystems  $e_0, e_1, e_2, e_3$  läßt zwei disjunkte Möglichkeiten zu:
  - a)  $e_0$  zeigt (im kausalen Sinn) in Richtung der zunehmenden Zeit und  $e_1, e_2, e_3$  bilden ein rechtshändiges System.
  - b)  $e_0$  zeigt in Richtung abnehmender Zeit ("die Zeit läuft rückwärts") und  $e_1, e_2, e_3$  ist ein linkshändiges System.

## 5.2 Die Poincaré-Gruppe

*Definition 5.3.* Die *Poincaré-Gruppe* ist die Automorphismengruppe von  $M_4$ , d.h. sie ist die Gruppe aller affinen Abbildungen  $f : M_4 \rightarrow M_4$ , die (i) das Skalarprodukt invariant lassen:  $\langle (Df)(u), (Df)(v) \rangle = \langle u, v \rangle$  und (ii) die Orientierung erhalten:  $f^* \sigma = \sigma$ .

*Bemerkungen.*

1. Jede affine Abbildung  $f : M_4 \mapsto M_4$  ist von der Form  $a \mapsto f(a) = o + \Lambda(a - o) + w$  mit  $o \in M_4$  einem Weltpunkt,  $\Lambda : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  einer linearen Abbildung und  $w \in \mathbb{R}^4$  einem Vektor. Die Bedingungen (i) und (ii) schreiben sich dann wie folgt:
  - (i)  $\langle \Lambda u, \Lambda v \rangle = \langle u, v \rangle$
  - (ii)  $\det \Lambda = 1$ .
2. Eine Poincaré-Transformation, d.h. ein Element der Poincaré-Gruppe, bildet Inertialsysteme auf Inertialsysteme ab.

*Definition 5.4.* Die *Lorentz-Gruppe* ist die Untergruppe von Elementen der Poincaré-Gruppe, die einen ausgewählten Weltpunkt (z.B.  $o$ ) fixieren.

*Bemerkung.* Der lineare Teil  $\Lambda : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  einer Poincaré-Transformation bestimmt eine Lorentz-Transformation, d.h. ein Element der Lorentz-Gruppe, durch  $a \mapsto o + \Lambda(a - o)$ .



*Koordinatendarstellung.* Eine Poincaré-Transformation  $a \mapsto f(a) = o + \Lambda(a - o) + w$  wird bezüglich eines Inertialsystems  $\{o; e_0, e_1, e_2, e_3\}$  wie folgt dargestellt. Wir setzen  $a - o = x^\mu e_\mu$ ,  $f(a) - o = y^\mu e_\mu$ ,  $\Lambda e_\mu = \Lambda^\nu_\mu e_\nu$  und  $w = w^\mu e_\mu$  und haben dann

$$y^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + w^\mu.$$

Die Koeffizienten  $\Lambda^\mu_\nu$  genügen der aus der Bedingung  $\langle e_\mu, e_\nu \rangle = \langle \Lambda e_\mu, \Lambda e_\nu \rangle$  mit  $g_{\mu\nu} := \langle e_\mu, e_\nu \rangle$  folgenden Gleichung  $g_{\mu\nu} = \Lambda^\lambda_\mu g_{\lambda\rho} \Lambda^\rho_\nu$ . Aus  $\det \Lambda = 1$  folgt  $\det(\Lambda^\nu_\mu) = 1$ .

### 5.3 Äußerer Kalkül auf $M_4$

Wir bezeichnen den Raum aller Differentialformen (besser wäre es, hier gleich mit den Stromformen zu arbeiten)  $k$ -ten Grades auf  $M_4$  mit  $\Lambda^k(M_4)$ . Die metrikfreien Operationen äußeres Produkt, inneres Produkt, äußere Ableitung, Pullback und Integration sind genauso definiert wie zuvor. Wir notieren die äußere Ableitung mit  $d : \Lambda^k(M_4) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M_4)$ . Um Verwirrung unter den Studenten zu vermeiden, schreiben wir ab jetzt „ $\mathfrak{d}$ “ für die räumliche äußere Ableitung (bzgl. einer fest gewählten Raum-Zeit-Zerlegung). Es gilt dann  $d = \mathfrak{d} + dt \wedge \partial / \partial t$ . Die Koordinaten-1-Formen  $dx^0, \dots, dx^3$  bezüglich eines Inertialsystems  $\{o; e_0, \dots, e_3\}$  sind wie üblich durch  $(dx^\mu)_a(v) = \theta^\mu(v)$  (unabhängig von  $a$ ) erklärt. Insbesondere ist  $dx^0 \equiv c dt$ .

Was sich gegenüber vorher ändert, sind alle Größen wie z.B. der Laplace-Operator, die über den Sternoperator von der Metrik abhängen. Der Sternoperator ist jetzt eine Abbildung  $\star : \Lambda^k(M_4) \rightarrow \Lambda^{4-k}(M_4)$ . Er wird durch die Relation  $\alpha \wedge \beta = (\star\alpha, \beta)\sigma$  erklärt (siehe Abschn. 0.7).

### 5.4 Kovariante Formulierung der Theorie

*Faraday-Form.*  $F = E \wedge dt + B$  ( $F \in \Lambda^2(M_4)$ ).

physikalische Dimension:  $[F] = \text{Wirkung/Ladung}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} dF &= \mathfrak{d}E \wedge dt + \mathfrak{d}B + dt \wedge \dot{B} \\ &= \underbrace{(\mathfrak{d}E + \dot{B})}_{=0} \wedge dt + \underbrace{\mathfrak{d}B}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{dF = 0} \quad (\text{homogene Maxwell-Gleichungen}).$$

*Vierer-Strom.*  $J = \rho - j \wedge dt$  ( $J \in \Lambda^3(M_4)$ ).

physikalische Dimension:  $[J] = \text{Ladung}$ .

$$dJ = -\mathfrak{d}j \wedge dt + dt \wedge \dot{\rho} = dt \wedge \underbrace{(\dot{\rho} + \mathfrak{d}j)}_{=0} = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{dJ = 0} \quad (\text{Kontinuitätsgleichung} \leftrightarrow \text{Ladungserhaltung}).$$

*Maxwell-Form.*  $G = D - H \wedge dt$  ( $G \in \Lambda^2(M_4)$ ).

physikalische Dimension:  $[G] = [\text{Ladung}]$ .

$$dG = dD - dH \wedge dt + dt \wedge \dot{D} = \underbrace{dD}_{=\rho} - (\underbrace{dH - \dot{D}}_{=j}) \wedge dt = J.$$

$$\Rightarrow \boxed{dG = J} \quad (\text{inhomogene Maxwell-Gleichungen}).$$

*Bemerkung.*  $J = dG \Rightarrow dJ = d(dG) = 0$ .

*Materialgleichungen (im Vakuum).*

$$\begin{aligned} \star F &= \star(E \wedge dt + B) = \star(E_x dx \wedge dt + \dots + B_{xy} dx \wedge dy + \dots) \\ &= -\frac{1}{c} E_x dy \wedge dz + \dots + c B_{xy} dz \wedge dt + \dots \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0 c} D_{yz} dy \wedge dz + \dots + \mu_0 c H_z dz \wedge dt + \dots \\ &= -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (D - H \wedge dt) = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} G. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} G = \star F} \quad (\text{Materialgleichungen}).$$

physikalische Dimension  $[\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}] = \text{Wirkung/Ladung}$ .

### Koordinatendarstellung

*Faraday-Form.*

$$F = B + E \wedge dt = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$(F_{i0} = c E_i, \quad F_{ij} = B_{ij})$$

*Maxwell-Form.*

$$G = D - H \wedge dt = \frac{1}{2!} G_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$(G_{i0} = -c H_i, \quad G_{ij} = D_{ij})$$

*Vierer-Strom.*

$$J = \rho - j \wedge dt = \frac{1}{3!} J_{\mu\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$$

## 5.5 Invarianzeigenschaften der Maxwell'schen Theorie

Die Maxwell-Gleichungen  $dF = 0$  und  $dG = J$  haben in *allen* Koordinatensystemen dieselbe Form:

$$\begin{aligned} dF = 0 : \quad & \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \\ dG = J : \quad & \partial_\lambda G_{\mu\nu} + \partial_\mu G_{\nu\lambda} + \partial_\nu G_{\lambda\mu} = J_{\lambda\mu\nu} . \end{aligned}$$

Diese Forminvarianz schließt krummlinige Koordinaten ( $\rightarrow$  beschleunigte Bezugssysteme) ein. Die Materialgleichungen  $-\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}G = \star F$  enthalten den Sternoperator, der auf die Metrik und die Orientierung des  $M_4$  Bezug nimmt. Poincaré-Transformation vertauschen per Definition der Poincaré-Gruppe mit dem Sternoperator  $\star$ . Folglich sind die Materialgleichungen

$$\star F = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} G : \quad F_{01} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} G_{23} \quad \text{usw.}$$

forminvariant unter Poincaré-Transformationen. (Tatsächlich ist die Invarianzgruppe sogar größer, denn  $\star : \Lambda^2(M_4) \rightarrow \Lambda^2(M_4)$  vertauscht auch mit Dilatationen  $x^\mu \mapsto s x^\mu$  ( $s \in \mathbb{R}^+$ ), was auf die sogenannte *konforme Gruppe* führt.)

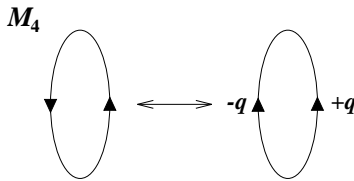
Hier wären die Symmetrien der Maxwell'schen Theorie noch etwas ausführlicher zu diskutieren (Raumspiegelung und Zeitumkehr). Insbesondere wäre endlich mal auf den Unterschied zwischen geraden und ungeraden Differentialformen einzugehen.

## 5.6 Anschauliche Deutung mittels Stromformen

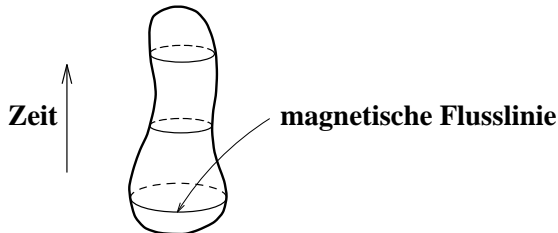
Wir können die Differentialformen  $F$ ,  $G$  und  $J$  als Stromformen auffassen (siehe Abschn. ??) und dann durch Ketten veranschaulichen.

Der Viererstrom ist eine Stromform dritten Grades, was im vierdimensionalen Raum einer 1-Kette entspricht. Die Kontinuitätsgleichung  $dJ = 0$  übersetzt sich in  $\partial J = 0$ , was bedeutet, daß die 1-Kette von  $J$  sich aus randlosen Linien  $\gamma_i$  im  $M_4$  zusammensetzt ( $J = \sum q_i \gamma_i$ ). Diese Linien sind nichts anderes als die Weltlinien geladener Teilchen. Der reelle Gewichtungsfaktor  $q_i$  der Linie  $\gamma_i$  der 1-Kette  $J$  ist die Ladung des  $i$ -ten Teilchens.

Die Faraday-Form ist eine Stromform zweiten Grades und wird im vierdimensionalen Raum durch eine 2-Kette (Weltflächen) veranschaulicht. Die homogenen Maxwell-Gleichungen  $dF = 0$  entsprechen in der Interpretation von  $F$  als 2-Kette der Relation  $-\partial F = 0$ . Mit anderen Worten besteht  $F$  wie in Abb. 5.2 illustriert aus *geschlossenen Weltflächen*. Bilden wir den Durchschnitt einer geschlossenen Weltfläche mit den 3-Ebenen konstanter Zeit  $t$ , so entstehen geschlossene Linien im  $E_3$  (in einem  $E_3$ ). Aus  $F = B + E \wedge dt$  sieht man, daß diese geschlossenen Linien als die Flußlinien der magnetischen Flußdichte  $B$  anzusehen sind.



**Abbildung 5.1.** Die 1-Kette  $J$  ist aus geschlossenen Weltlinien aufgebaut. Ladungsumkehr fällt hier mit Zeitumkehr zusammen: ein Vorzeichenwechsel  $q \rightarrow -q$  ist äquivalent zur Änderung der Orientierung der Weltlinie.



**Abbildung 5.2.** Zwischen Zeitpunkten von Entstehung und Vernichtung überstreicht eine magnetische Flusslinie eine geschlossene Weltfläche, die zur 2-Kette der Faraday-Form  $F$  beiträgt.

Die Maxwell-Form ist ebenfalls eine Stromform zweiten Grades und wird im vierdimensionalen Raum wieder durch eine 2-Kette (Weltflächen) veranschaulicht. Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen  $dG = J$  entsprechen in der Interpretation von  $G$  als 2-Kette und von  $J$  als 1-Kette der Relation  $-\partial G = J$ . Mit anderen Worten besteht  $G$  aus Weltflächen, die entweder geschlossen sind oder durch die Weltlinien geladener Teilchen berandet werden. Der Durchschnitt einer solchen Weltfläche mit  $t = \text{const}$  ist eine elektrische Flußlinie. Diese ist entweder geschlossen oder beginnt auf einer positiven Ladung usw. usw. Hier wird noch eine Abbildung benötigt.

## 5.7 Altes relativistisch aufgewärmt

Um den Rechenvorteil der kovarianten Formulierung zu illustrieren, greifen wir einige Themen nochmals auf, die wir bereits in Kap. 4 behandelt haben.

*Vorbereitung 1.* Aufg. 0.7.4:  $\star\star = (-1)^{k(n-k)}(\sigma, \sigma)$ .

Minkowski-Raum  $M_4$ :  $n = 4$  und  $(\sigma, \sigma) = -1$ .

$$\Rightarrow \star\star = -(-1)^{k(4-k)} = (-1)^{k-1} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$\delta = (-1)^{l-1} \star^{-1} d\star : \Lambda^l(M_4) \rightarrow \Lambda^{l-1}(M_4) \quad (1 \leq l \leq 4);$$

Man sieht, daß gilt:

$$\delta = (-1)^{l-1} \underbrace{(\star\star)^{-1}}_{=(-1)^{l-2}} \star d\star = - \star d\star \quad \text{in allen Fällen } (1 \leq l \leq 4).$$

Vorbereitung 2. Laplace-Operator  $\Delta$  auf  $M_4 = -d$ 'Alembert-Operator  $\square$ .  
Behauptung für Funktionen nachprüfen:

$$\begin{aligned} \Delta f &= (d\delta + \delta d) f = \delta d f \\ &= \delta(\partial_t f dt + \partial_x f dx + \partial_y f dy + \partial_z f dz) \\ &= - \star d \left( \frac{1}{c} \partial_t f dx \wedge dy \wedge dz + \partial_x f dy \wedge dz \wedge (c dt) + \dots \right) \\ &= - \star \left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 f - \partial_x^2 f - \partial_y^2 f - \partial_z^2 f \right) c dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \\ &= - \square f \star \underbrace{(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)}_{=\sigma} \\ &\stackrel{\star\sigma=1}{=} - \square f. \end{aligned}$$

Wellengleichung für  $F$  und  $G$ .

$$\left. \begin{aligned} dG = J &\Rightarrow \delta dG = \delta J \\ \delta G = - \star \underbrace{d \star G}_{\sim dF=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \boxed{\Delta G = \delta J}$$

$$\begin{aligned} \star \Delta = \Delta \star &\Rightarrow \delta J = \Delta G = \Delta \left( -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \star F \right) = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \star \Delta F \\ &\Rightarrow \Delta = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \underbrace{\star^{-1} \delta J}_{=-d \star J} \Rightarrow \boxed{\Delta F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} d \star J} \end{aligned}$$

Viererpotential  $A$ .  $dF = 0$  auf  $M_4$ .  $M_4$  sternförmig, Poincaré-Lemma  
 $\Rightarrow$  Es existiert ein Potential  $A$ :  $F = dA$  ( $A \in A^1(M_4)$ ).

Bemerkung.  $A = -\Phi dt + \mathcal{A}$  ( $\mathcal{A}$  = Vektorpotential).

Koordinatendarstellung.

$$A = A_\mu dx^\mu \quad (A_0 = -\Phi/c, \quad A_i = \mathcal{A}_i \quad (i = 1, 2, 3) .)$$

Lorentz-Eichung für  $A$ . :  $\delta A = 0$ .

$$\begin{aligned} \delta A &= - \star d \star A = - \star d \star (A_\mu dx^\mu) \\ &= - \star d (A_0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + A_1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 + \dots) \\ &= \left( -\partial_0 A_0 + \sum_{i=1}^3 \partial_i A_i \right) \underbrace{\star(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)}_{=1} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Wellengleichung für  $A$ .

$$\begin{aligned} dA = F &\Rightarrow \star dA = \star F = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} G \\ \Rightarrow d\star dA = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} J &\quad \text{und} \quad \delta dA = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \star J \\ \text{Lorentz-Eichung } \delta A = 0 &\Rightarrow \boxed{\Delta A = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \star J} \end{aligned}$$

## 5.8 Transformationsverhalten der Felder und Ströme

Zwei verschiedene Sichtweisen sind möglich:

1. Der Minkowski-Raum  $M_4$  wird einer Poincaré-Abbildung  $\phi : M_4 \rightarrow M_4$  unterworfen (“aktive Transformation”), und die Felder und Ströme werden mittels  $\phi$  zurückgeholt.
2. Die Felder und Ströme werden als fest angesehen (vom Bezugssystem unabhängig definiert) und es wird lediglich ein Koordinatenwechsel von einem Inertialsystem zu einem anderen durchgeführt (“passive Transformation”).

Wir machen uns hier die zweite Sichtweise zu eigen.

### 5.8.1 Transformation des Viererstroms

Für den Viererstrom  $J = \rho - j \wedge dt$  setzen wir (nicht nötig, spart aber einige Indizes und Schreiarbeit)  $\star J = J_\mu dx^\mu$ .

Inertialsystem 1 mit affinem Koordinatensystem  $\{o; e_0, e_1, e_2, e_3\}$  und Koordinatenfunktionen  $x^0, x^1, x^2, x^3$ :

$$\star J = J_\mu^{(1)} dx^\mu.$$

Inertialsystem 2 mit affinem Koordinatensystem  $\{o; e'_0, e'_1, e'_2, e'_3\}$  und Koordinatenfunktionen  $y^0, y^1, y^2, y^3$ :

$$\star J = J_\nu^{(2)} dy^\nu.$$

Lorentz-Transformation:  $x^\mu = \sum_\nu A_\nu^\mu y^\nu$ .

$dx^\mu = \sum_\nu A_\nu^\mu dy^\nu$  einsetzen  $\Rightarrow$

$$J_\mu^{(1)} A_\nu^\mu dy^\nu = \star J = J_\nu^{(2)} dy^\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{J_\nu^{(2)} = J_\mu^{(1)} A_\nu^\mu}.$$

Boost in 1-Richtung <sup>1</sup>:

<sup>1</sup> Abkürzende Schreibweise:  $\text{sh } \alpha \equiv \sinh \alpha$  &  $\text{ch } \alpha \equiv \cosh \alpha$ .

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\alpha & \text{sh}\alpha & 0 & 0 \\ \text{sh}\alpha & \text{ch}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

[Genauer:  $x^1 = \text{sh}\alpha y^0 + \text{ch}\alpha y^1 \Rightarrow$  Inertialsystem 2 bewegt sich relativ zu Inertialsystem 1 mit der Geschwindigkeit  $v = c \tanh \alpha$  in Richtung der positiven 1-Achse.]

Explizit:

$$\begin{aligned} J_0^{(2)} &= \text{ch}\alpha J_0^{(1)} + \text{sh}\alpha J_1^{(1)}, \\ J_1^{(2)} &= \text{sh}\alpha J_0^{(1)} + \text{ch}\alpha J_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Noch expliziter:

$$\begin{aligned} \star J &= \star(\rho - j \wedge dt) \\ &= \rho_{123} \star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) - \frac{1}{c} j_{12} \star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^0) - \dots \\ &= \rho_{123} dx^0 - \frac{1}{c} j_{12} dx^3 - \frac{1}{c} j_{23} dx^1 - \frac{1}{c} j_{31} dx^2. \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{123}^{(2)} &= \text{ch}\alpha \rho_{123}^{(1)} - \frac{1}{c} \text{sh}\alpha j_{23}^{(1)} \\ j_{23}^{(2)} &= -c \cdot \text{sh}\alpha \rho_{123}^{(1)} + \text{ch}\alpha j_{23}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ch}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ \text{sh}\alpha &= \frac{\tanh \alpha}{\sqrt{1 + \tanh^2 \alpha}} = \frac{v/c}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

### 5.8.2 Transformation der Felder

$$F = E \wedge dt + B =: \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu; \Rightarrow$$

$$F_{ij} = B_{ij} \quad \text{und} \quad E_i = cF_{i0} = -cF_{0i} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Inertialsysteme 1 und 2 wie zuvor:

$$F = \frac{1}{2} F_{\lambda\rho}^{(1)} dx^\lambda \wedge dx^\rho = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(2)} dy^\mu \wedge dy^\nu$$

$$x^\lambda = \sum_\mu A_\mu^\lambda y^\mu \Rightarrow$$

$$\boxed{F_{\mu\nu}^{(2)} = A_\mu^\lambda F_{\lambda\rho}^{(1)} A_\nu^\rho}.$$

Wieder ein Boost in 1-Richtung; Koeffizienten  $A_\beta^\alpha$  wie oben. Summe ausrechnen  $\Rightarrow$ :

$$\begin{aligned}
E_2^{(2)} &= E_2^{(1)} \cdot \operatorname{ch}\alpha - B_{12}^{(1)} \cdot c \cdot \operatorname{sh}\alpha, \\
B_{12}^{(2)} &= B_{12}^{(1)} \cdot \operatorname{ch}\alpha - E_2^{(1)} \cdot \frac{1}{c} \cdot \operatorname{sh}\alpha; \\
E_3^{(2)} &= E_3^{(1)} \cdot \operatorname{ch}\alpha + B_{31}^{(1)} \cdot c \cdot \operatorname{sh}\alpha, \\
B_{31}^{(2)} &= B_{31}^{(1)} \cdot \operatorname{ch}\alpha + E_3^{(1)} \cdot \frac{1}{c} \cdot \operatorname{sh}\alpha; \\
E_1^{(2)} &= E_1^{(1)}; , \\
B_{23}^{(2)} &= B_{23}^{(1)}.
\end{aligned}$$

*Aufgabe 5.8.1.* Hier könnte man noch eine scheinbar paradoxe Situation ansprechen: ein bewegtes geladenes Teilchen spürt im Magnetfeld eines stromführenden (aber elektrisch neutralen) Leiters eine Lorentz-Kraft. Im Ruhesystem des Teilchens fehlt die Lorentz-Kraft. Dafür wirkt aber jetzt eine elektrostatische Kraft, denn der Leiter erscheint nun geladen.

### 5.8.3 Aharonov-Casher-Effekt

Eine bewegte stromführende Spule erscheint geladen... ein bewegter magnetischer Dipol unterliegt einer Spin-Bahn-Wechselwirkung...

## 5.9 Erhaltungssätze

Erfüllt eine 3-Form  $T \in \Lambda^3(M_4)$  die Gleichung  $dT = 0$ , so folgt ein Erhaltungssatz. Sei nämlich  $T = u - s \wedge dt$  (Raum-Zeit-Zerlegung). Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 = dT &= dt \wedge \dot{u} - \mathbf{d}s \wedge dt = dt \wedge (\dot{u} + \mathbf{d}s); \\
\dot{u} + \mathbf{d}s = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_3} u = - \int_{E_3} \mathbf{d}s = - \int_{\partial E_3} s = 0 \quad \text{da} \quad \partial E_3 = 0.
\end{aligned}$$

Beachte: Die Raum-Zeit-Zerlegung  $T = u - s \wedge dt$  zeichnet einen  $E_3$  aus. Der Erhaltungssatz  $\int_{E_3} u = \text{const}$  gilt für jede Wahl von  $E_3$  (verschiedene Bezugssysteme). Ziel: konstruiere geschlossene 3-Formen.

Betrachte nun für ein (zunächst) beliebiges Vektorfeld  $\xi$  ( $\xi : M_4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ) die 3-Form:

$$\begin{aligned}
T_\xi &:= \frac{1}{2} F \wedge i_\xi G - \frac{1}{2} (i_\xi F) \wedge G; \\
dT_\xi &= \frac{1}{2} F \wedge di_\xi G - \frac{1}{2} (di_\xi F) \wedge G + \frac{1}{2} (i_\xi F) \wedge dG \\
&= \frac{1}{2} F \wedge L_\xi G - \frac{1}{2} (L_\xi F) \wedge G + \underbrace{\frac{1}{2} (i_\xi F) \wedge J - \frac{1}{2} F \wedge i_\xi J}_{=(i_\xi F) \wedge J};
\end{aligned}$$



Mit  $G = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \star F$  und  $\alpha \wedge \star \beta = \beta \wedge \star \alpha$  folgt

$$F \wedge L_\xi G - (L_\xi F) \wedge G = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (F \wedge L_\xi \star F - F \wedge \star L_\xi F) .$$

$$\Rightarrow dT_\xi = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} F \wedge (\star L_\xi - L_\xi \star) F + (i_\xi F) \wedge J .$$

Wähle jetzt  $\xi$  als das erzeugende Vektorfeld einer Poincaré-Transformation (d.h. der Fluß von  $\xi$  sei eine Einparameter-Gruppe von Poincaré-Transformationen.). Dann folgt  $\star L_\xi = L_\xi \star$  und

$$\boxed{dT_\xi = (i_\xi F) \wedge J} .$$

In Abwesenheit von Materie ( $J = 0$ ) ergeben sich die Erhaltungssätze:

1.  $\xi = \partial_t \Rightarrow \dot{u} + \mathfrak{d}s = 0$  mit

$$u = \frac{1}{2} (E \wedge D + B \wedge H) , \quad s = E \wedge H \quad (\rightarrow \text{Energie}) .$$

2.  $\xi = \partial_x \Rightarrow \dot{u} + \mathfrak{d}s = 0$  mit

$$u = B \wedge \partial_x \lrcorner D ,$$

$$s = \frac{1}{2} \left\{ D \partial_x \lrcorner E - (\partial_x \lrcorner D) \wedge E + B \partial_x \lrcorner H - (\partial_x \lrcorner B) \wedge H \right\}$$

( $\rightarrow x$ -Komponente des Impulses (bis auf Minuszeichen)).

3.  $\xi = x\partial_y - y\partial_x \Rightarrow \dots$  ( $\rightarrow$  Drehimpuls bzgl. der  $z$ -Achse).



## 6. Wirkungsprinzip für klassische Feldtheorien

Eine Erinnerung an die klassische Mechanik:

dynamische Variablen  $q = \{q^i\}_{i=1,\dots,f}$  (verallgemeinerte Koordinaten)

mit Geschwindigkeiten  $\dot{q} = \{\dot{q}^i\}_{i=1,\dots,f}$ .

Lagrange-Funktion:  $(q, \dot{q}) \mapsto \mathcal{L}(q, \dot{q})$ ;

Wirkungsfunktional:  $\mathcal{S}[q] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt$ .

*Hamiltonsches Prinzip der extremalen Wirkung.* Lösungen der Bewegungsgleichungen sind Extrema des Funktionals  $\mathcal{S}$  unter den Randbedingungen  $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$ .

⇒ Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \quad (i = 1 \dots, f).$$

*Übertragung auf Feldtheorien.* In einer Feldtheorie vom hier diskutierten Typ sind die dynamischen Variablen Felder; genauer: Differentialformen vom Grad  $k$ .

Eine Poincaré-invariante Feldtheorie wird über dem Minkowski-Raum  $M_4$  mit Sternoperator  $\star$  formuliert. ( $M_4$  übernimmt die Rolle der Zeitachse in der klassischen Mechanik.)

Wir betrachten eine Feldtheorie mit nur einem einzigen Feld, das wir hier mit  $\omega$  ( $\omega \in \Lambda^k(M_4)$ ) bezeichnen. (Die Verallgemeinerung auf mehrere Felder erfolgt in der natürlichen Weise.)

Die *Lagrange-Dichte* ist eine Vorschrift, die  $\omega$  und seiner äußeren Ableitung  $d\omega$  ( $d\omega \leftrightarrow \dot{q}$  in der Mechanik) eine 4-Form  $\mathcal{L}(\omega, d\omega)$  zuordnet.  $\mathcal{L}$  sei ein lokales Funktional, d.h. Variieren von  $\omega$  an einem Punkt  $a \in M_4$  liefere eine Variation von  $\mathcal{L}(\omega, d\omega)$  nur am selben Punkt.

*Beispiel 6.0.1.* Freies, massives, skalares Feld:  $\omega \in \Lambda^0(M_4)$  mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega, d\omega) &= +\frac{1}{2} d\omega \wedge \star d\omega - \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \sigma \\ &= \left( \frac{1}{c^2} (\partial\omega/\partial t)^2 - \sum_i (\partial\omega/\partial x^i)^2 - M^2 \omega^2 \right) \sigma \end{aligned}$$

und  $\sigma = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ .

*Wirkungsfunktional.* Für ein beschränktes Gebiet  $N \subset M_4$  ist das Wirkungsfunktional  $\mathcal{S}_N[\omega]$  durch

$$\mathcal{S}_N[\omega] = \int_N \mathcal{L}(\omega, d\omega)$$

definiert.

$\omega$  heißt *Extremum* von  $\mathcal{S}_N$ , wenn gilt

$$\left. \frac{d}{ds} \mathcal{S}_N[\omega^s] \right|_{s=0} = 0$$

für jede differenzierbare Einparameterfamilie von Feldern  $\omega^s$  mit  $\omega^s|_{s=0} = \omega$  und  $(\omega^s - \omega)|_{\partial N} = 0$ .

*Wirkungsprinzip.* Die Lösungen der Feldgleichungen einer Feldtheorie mit Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$  sind Extrema von  $\mathcal{S}_N = \int_N \mathcal{L}$ .

*Ableitung der Feldgleichungen.* (aus dem Wirkungsprinzip):

Setze  $\omega^s = \omega + s\eta$  mit  $\eta \in \Lambda^k(M_4)$ ,  $\eta|_{\partial N} = 0$ , sonst beliebig.  $\Rightarrow$

$$\left. \frac{d}{ds} \mathcal{S}_N[\omega^s] \right|_{s=0} = \int_N \left. \frac{d}{ds} \mathcal{L}(\omega + s\eta, d\omega + sd\eta) \right|_{s=0}.$$

Da  $\left. \frac{d}{ds} \mathcal{L}(\omega + s\eta, d\omega + sd\eta) \right|_{s=0}$  homogen vom Grad Eins in  $\eta$  und  $d\eta$  ist, existieren Abbildungen

$$(\omega, d\omega) \mapsto \alpha(\omega, d\omega) \in \Lambda^{4-k}(M_4) \quad \text{und}$$

$$(\omega, d\omega) \mapsto \beta(\omega, d\omega) \in \Lambda^{4-k-1}(M_4), \quad \text{so daß}$$

$$\left. \frac{d}{ds} \mathcal{L}(\omega + s\eta, d\omega + sd\eta) \right|_{s=0} = \eta \wedge \alpha(\omega, d\omega) + d\eta \wedge \beta(\omega, d\omega).$$

Wir schreiben  $\partial\mathcal{L}/\partial\omega := \alpha(\omega, d\omega)$ ,  $\partial\mathcal{L}/\partial(d\omega) := \beta(\omega, d\omega)$ .

Damit ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \mathcal{S}_N[\omega^s] \right|_{s=0} &= \int_N \left( \eta \wedge \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega} + d\eta \wedge \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(d\omega)} \right) \\ &= \int_N \eta \wedge \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega} - (-1)^k d \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(d\omega)} \right). \end{aligned}$$

Wegen  $\eta|_{\partial N} = 0$  entsteht beim partiellen Integrieren kein Randterm. Da  $\eta$  beliebig ist, folgt aus dem Wirkungsprinzip  $0 = \left. \frac{d}{ds} \mathcal{S}_N[\omega^s] \right|_{s=0}$ :

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega} = (-1)^k d \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(d\omega)} \right)} \quad (\text{Feldgleichungen})$$

Diese Gleichungen verallgemeinern die Euler-Lagrange-Gleichungen der klassischen Mechanik.

Beispiel 6.0.2. 
$$\mathcal{L}(\varphi, d\varphi) = \frac{1}{2} d\varphi \wedge \star d\varphi - \frac{1}{2} M^2 \varphi^2 \sigma$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -M^2 \varphi^2 \sigma, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\varphi)} = \star d\varphi.$$

Feldgleichung (Klein-Gordon):  $-M^2 \varphi^2 \sigma = d \star d\varphi$  oder  $-\square \varphi = \Delta \varphi = M^2 \varphi$ .  
 Lösungsansatz in 1 Dimension:  $\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t)$   
 Es folgt  $-\omega^2/c^2 + k^2 = -M^2$  oder  $\omega/c = \sqrt{k^2 + M^2}$  (Dispersionsrelation)  
 Sie beschreibt frei propagierende Wellen. Durch den Prozeß der Quantisierung (siehe Vorlesung über Quantenmechanik) wird dem Wellenvektor  $k$  der Impuls  $p = \hbar k$  und der Frequenz  $\omega$  die Energie  $E = \hbar \omega$  zugewiesen. ( $\hbar$  ist das Plancksche Wirkungsquantum.) Die Dispersionsrelation  $\omega(k)/c = \sqrt{M^2 + k^2}$  geht dann in die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4},$$

über, wobei Masse  $m = \hbar M/c$ .  $\Rightarrow$  Sprechweise: „freies massives Skalarfeld“.

### 6.1 Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

Eichpotential  $A$  ordentlich eingeführt?

Lagrange-Dichte:  $\mathcal{L}(A, dA) = -\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} dA \wedge \star dA - A \wedge J$  mit  $A$  dem Eichpotential.

Beachte: Nicht die Faraday-Form  $F$  (oder Maxwell-Form  $G$ ), sondern das Eichpotential  $A$  ist das „Feld“ in der Lagrange-Formulierung.

Feldgleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = -J, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dA)} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \star dA;$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} + d \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dA)} = -J - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} d \star dA.$$

Mit  $\star dA = \star F = -\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} G$  sind dies die inhomogenen Maxwellgleichungen  $J = dG$ .

Raum-Zeit-Zerlegung:  $(A = -\Phi dt + \mathcal{A}, J = \rho - j \wedge dt)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F \wedge G - A \wedge J = \left( \frac{1}{2} E \wedge D - \frac{1}{2} H \wedge B - \rho \Phi + j \wedge \mathcal{A} \right) \wedge dt$$

(„kinetische Energie“  $E \wedge D$ , „potentielle Energie“  $B \wedge H$ )

*Bemerkungen.*

1. Die Gleichungen  $-d \star dA = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} J$  legen  $A$  nicht fest, da immer die Möglichkeit einer Eichtransformation  $A \mapsto A + d\Psi$  besteht.

2. Der Vierer-Strom  $J$  ist hier extern vorgegeben und hat keine eigene Dynamik. Eine vollständige Theorie (siehe z.B. unten) erfordert zusätzliche Terme in  $\mathcal{L}$  für die stromtragenden Materiefelder.
3. Unter Eichtransformationen geht  $dA$  in sich über, aber der Kopplungsterm  $-A \wedge J$  ändert sich:  $-A \wedge J \mapsto -(A + d\Psi) \wedge J$ , d.h.  $-A \wedge J$  ist „nicht eichinvariant“. Dieser Umstand hängt mit der Unvollständigkeit der Beschreibung zusammen. Eichtransformationen wirken auch auf die Materiefelder (siehe unten), und deshalb ist erst die Lagrange-Dichte für das vollständige System (Materie + Eichfeld) eichinvariant.
4. Das Wirkungsfunktional  $\mathcal{S}_N[A] = \int_N \left( -\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} dA \wedge \star dA - A \wedge J \right)$  erfüllt

$$\mathcal{S}_N[A + d\Psi] - \mathcal{S}_N[A] = - \int_N d\Psi \wedge J = - \int_{\partial N} \Psi J .$$

(wegen  $dJ = 0$ .)  $\mathcal{S}_N[A]$  ist daher eichinvariant unter der Randbedingung  $\Psi|_{\partial N} = 0$ . Dies ist der Grund, warum die aus dem Wirkungsprinzip resultierenden Feldgleichungen  $d \star dA = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} J$  eichinvariant sind.

5. Bei der Quantisierung ( $\rightarrow$  Quantentheorie) der Maxwell'schen Theorie (und anderer Feldtheorien) geht man üblicherweise von der Lagrange-Formulierung aus.
6. Wir können zu  $\mathcal{L}$  eine exakte Form, zum Beispiel

$$F \wedge F = d(A \wedge dA) ,$$

(„Pontrjagin-Dichte“) addieren, ohne die Feldgleichungen zu ändern. (Ein solcher Term ist für die Quantentheorie von Bedeutung.)

## 6.2 Erhaltene Ströme

Eine 3-Form  $T$  ( $T \in A^3(M_4)$ ) heißt ein *erhaltener Strom*, wenn  $T$  geschlossen ist ( $dT = 0$ ), und es folgt bekanntlich ein Erhaltungssatz.

*Konstruktion erhaltener Ströme in einer Poincaré-invarianten Feldtheorie.*  
Feld  $\omega$ , Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}(\omega, d\omega)$ .

Sei  $\xi$  das erzeugende Vektorfeld einer Einparameter-Gruppe (erklärt?) von Poincaré-Transformationen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_\xi \mathcal{L} &\stackrel{L_\xi \star = \star L_\xi}{=} (L_\xi \omega) \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} + (L_\xi d\omega) \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\omega)} \\ &\stackrel{\text{Feldgln.}}{=} (L_\xi \omega) \wedge (-1)^k d \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\omega)} + (dL_\xi \omega) \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\omega)} \\ &= d \left( L_\xi \omega \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\omega)} \right) . \end{aligned}$$

Mit  $L_\xi \mathcal{L} = (di_\xi + i_\xi d) \mathcal{L} = di_\xi \mathcal{L}$  folgt:

$$d \left( L_{\xi} \omega \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\omega)} - i_{\xi} \mathcal{L} \right) = 0,$$

d.h. wir haben einen erhaltenen Strom gefunden:

$$\boxed{T_{\xi} = -L_{\xi} \omega \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\omega)} + i_{\xi} \mathcal{L}} \quad \text{erfüllt} \quad dT_{\xi} = 0.$$

Anwendung auf die „reine“ Elektrodynamik:

$$\mathcal{L}(A, dA) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} dA \wedge \star dA. \quad \text{Hier ist:}$$

$$T_{\xi} = -(L_{\xi} A) \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dA)} + i_{\xi} \mathcal{L}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dA)} = +G \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} T_{\xi} &= -((di_{\xi} + i_{\xi} d) A) \wedge G + \frac{1}{2} i_{\xi} (F \wedge G) \\ &= -(i_{\xi} F) \wedge G + \frac{1}{2} (i_{\xi} F) \wedge G + \frac{1}{2} F \wedge (i_{\xi} G) - d(i_{\xi} A) \wedge G \\ &\stackrel{dG=0}{=} \underbrace{\frac{1}{2} F \wedge (i_{\xi} G) - \frac{1}{2} (i_{\xi} F) \wedge G}_{=: \hat{T}_{\xi}} - d(i_{\xi} A \wedge G). \end{aligned}$$

Wegen der Exaktheit von  $-d(i_{\xi} A \wedge G)$  ist auch der „symmetrische“ Anteil  $\hat{T}_{\xi}$  von  $T_{\xi}$  geschlossen, d.h. es gilt  $d\hat{T}_{\xi} = 0$  für  $\hat{T}_{\xi} = \frac{1}{2} F \wedge (i_{\xi} G) - \frac{1}{2} (i_{\xi} F) \wedge G$ , wie wir oben schon auf direktem Wege gezeigt haben. (Vgl. auch Kap.??.) Allerdings hängt jede Umkehrung  $A = A[F]$  der Beziehung  $F = dA$  nichtlokal von  $F$  ab. Die ‘Lokalisierungshypothese’ favorisiert daher schon aus rein theoretischer Sicht  $\hat{T}_{\xi}$ .

*Bemerkung.* Wegen  $d \circ d = 0$  sind erhaltene Stöme durch  $dT = 0$  nur bis auf Addition einer exakten 3-Form bestimmt. Welches  $T$  das „richtige“ ist (d.h. die korrekten Ausdrücke für Energiestrom, Impulsstrom, Drehimpulsstrom usw. liefert), läßt sich nicht aus allgemeinen Prinzipien deduzieren, sondern muß aus der Erfahrung entschieden werden.

## 6.3 Ginzburg-Landau-Theorie

(Anwendung des Variationsprinzips auf eine Gleichgewichtstheorie.  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$ .) In einem supraleitenden Festkörper binden sich Elektronen zu sogenannten „Cooper-Paaren“. Als Cooper-Paare können sie sich verlustfrei durch den Festkörper bewegen, was zu widerstandslosem Stromfluß führt.

Die magneto-statischen Eigenschaften von Supraleitern werden durch die Ginzburg-Landau-Gleichungen auf phänomenologische Weise beschrieben.

In der Ginzburg-Landau-Theorie geht man von einem Funktional für die statische Energie des Supraleiters aus. Es hat die Form:

$$\mathcal{H} = \int_{E_3} \left[ \frac{1}{2\mu_0} dA \wedge \star dA + \frac{1}{2m} (\hbar d\bar{\Psi} + iqA\bar{\Psi}) \wedge \star (\hbar d\Psi - iqA\Psi) + U(|\Psi|^2) dV \right].$$

Hierbei ist  $A$  das magnetische Vektorpotential und  $\Psi$  ein komplexwertiges (neu! bisher war alles reell) Skalarfeld, dessen Betragsquadrat  $|\Psi(p)|^2$  als die Wahrscheinlichkeit, ein Cooper-Paar am Ort  $p$  zu finden, interpretiert wird;  $q = 2e$  ist die elektrische Ladung eines Cooper-Paares,  $\hbar$  eine Konstante von der physikalischen Dimension einer Wirkung (Plancksche Konstante),  $U(x) = -\beta x + \frac{1}{2}\gamma x^2$  eine Funktion,  $d$  die räumliche äußere Ableitung und  $\star = \star_3$  der Sternoperator im  $E_3$ . **Vergleiche mit Hamiltonfunktion  $H = (p - eA)^2/2m$  für Teilchen im Magnetfeld und setze  $p \rightarrow \hbar d/i$ .** Die positiven Größen  $m$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sind die Parameter der Theorie. ( $m$  hat die Dimension einer Masse.) Beachte auch  $[\Psi] = (\text{Länge})^{-3/2}$ .

**Eichinvarianz diskutieren:**

$$A \mapsto A + d\chi, \quad \Psi \mapsto e^{iq\chi/\hbar}\Psi, \quad \bar{\Psi} \mapsto e^{-iq\chi/\hbar}\bar{\Psi}.$$

Per Postulat ist der Zustand des Supraleiters im Gleichgewicht ein Minimum von  $\mathcal{H}$ . Hieraus folgen die Ginzburg-Landau-Gleichungen. Sie sind die Euler-Lagrange-Gleichungen des Funktionals  $\mathcal{H}[A, dA, \Psi, d\Psi, \bar{\Psi}, d\bar{\Psi}]$  und lauten wie folgt:

$$1. \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A} = -d \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (dA)}.$$

Ausführen der Variationsableitungen ergibt das Amperesche Gesetz:  $dH = j_s$ , mit  $H = \mu_0^{-1} \star dA$  und  $j_s = \frac{\hbar q}{2mi} \star (\bar{\Psi} d\Psi - d\bar{\Psi} \Psi) - \frac{q^2}{m} |\Psi|^2 \star A$ .  $j_s$  ist als die Stromdichte-2-Form des Suprastroms zu interpretieren.

$$2. \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\Psi}} = d \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (d\bar{\Psi})}.$$

Hier ergibt das Ausrechnen:  $\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_A \Psi = U'(|\Psi|^2) \Psi$   
mit  $\Delta_A \Psi := \star (d - \frac{iq}{\hbar} A) \wedge \star (d - \frac{iq}{\hbar} A) \Psi$ .

$$3. \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Psi} = d \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (d\Psi)} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \bar{\Delta}_A \bar{\Psi} = U'(|\Psi|^2) \bar{\Psi}.$$

Wegen  $U'(\beta/\gamma) = 0$  haben die Ginzburg-Landau-Gleichungen die triviale Lösung

$$A \equiv 0 \quad \text{und} \quad \Psi = \sqrt{\beta/\gamma} = \text{const}.$$

(Allgemeiner wegen Eichinvarianz:  $A = d\chi$  und  $\Psi = e^{ie\chi/\hbar} \sqrt{\beta/\gamma}$ .)

Diese Lösung beschreibt das Innere des Supraleiters.

Nun wollen wir sehen, was an einer Vakuum-Supraleiter-Grenzfläche passiert. Im Vakuum ist  $B = dA \neq 0$  und  $\Psi = 0$  (keine Cooper-Paare im Vakuum). Tief im Inneren des Supraleiters ist  $|\Psi|^2 = \beta/\gamma$  und  $B = 0$ . Qualitativ erwarten wir daher das folgende Verhalten:



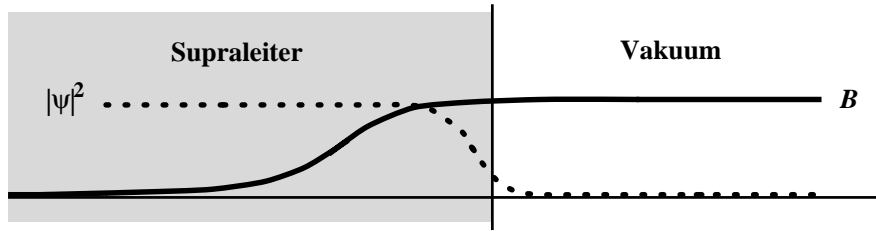


Abbildung 6.1.

*London-Limes.* Wir machen die Annahme, daß  $|\Psi|^2$  auf dem Weg in den Supraleiter hinein sehr schnell zu einem Sättigungswert  $\beta/\gamma$  ansteigt, während  $B$  nur langsam abfällt. (Dies ist der *Londonsche Grenzfall*. In welchem Parameterbereich er sich einstellt, werden wir später diskutieren.)

Zur Berechnung des Abfallverhaltens von  $B$  dürfen wir dann  $|\Psi|^2$  als räumlich konstant ansehen. Wir setzen  $\Psi = \sqrt{\beta/\gamma} = \text{const}$  (Unter welchen Bedingungen läßt sich die Phase von  $\Psi$  konstant eichen? Einfach zusammenhängender Supraleiter) in den Ausdruck für  $j_s$  ein und erhalten  $j_s = -\frac{q^2\beta}{m\gamma} \star A$ . Wegen  $dj_s = d(dH) = 0$  erfordert  $\Psi = \sqrt{\beta/\gamma}$  offensichtlich die Coulomb-Eichung  $d \star A = 0$ .

Das Amperesche Gesetz lautet  $j_s = dH = \mu_0^{-1} d \star dA$ . Gleichsetzen der Ausdrücke für  $j_s$  und auf beiden Seiten den Sternoperator anwenden gibt mit  $d \star A = 0$  die Gleichung

$$\Delta A = \lambda^{-2} A, \quad \lambda^{-2} = \mu_0 \frac{q^2 \beta}{m \gamma}.$$

Der Parameter  $\lambda$  hat die Dimension einer Länge.

Sei nun  $z$  die zur Grenzfläche senkrechte Koordinate und  $z > 0$  bezeichne das Innere des Supraleiters. Weiter sei  $A|_{z=0} := A^{(0)} = A^{\text{Vakuum}}$ ;  $A|_{z=\infty} = 0$ . Die Lösung der Gleichung  $\Delta A = \lambda^{-2} A$  zu diesen Randbedingungen ist unter der Annahme von Translationsinvarianz in der  $xy$ -Ebene  $A = e^{-z/\lambda} A^{(0)}$ .

Das Vektorpotential (und mit ihm das Magnetfeld) fällt im Supraleiter exponentiell ab.  $\lambda$  ist die Eindringtiefe. Die Magnetfeldverdrängung wird durch eine Supra-Stromdichte  $j_s = -(\mu_0 \lambda^2)^{-1} e^{-z/\lambda} \star A^{(0)}$  erreicht.

Wir werden jetzt die Übergangszone etwas genauer ansehen. Aus den Parametern der Theorie läßt sich neben  $\lambda$  eine zweite, unabhängige Länge bilden:  $\xi = \hbar / \sqrt{2m\beta}$ .

Wir suchen nach einer Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichungen in der Form

$$\Psi = \sqrt{\beta/\gamma} f(z) \quad \text{reell}, \quad A \equiv \frac{\hbar}{q} a(z) \frac{dx}{\xi}.$$

Die Funktionen  $f$  und  $a$  sind dimensionslos. Einsetzen des Ansatzes liefert:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad dH &= j_s & \Rightarrow & \quad \lambda^2 a'' = f^2 a & (i) \\
 (2) \quad \Delta_A \Psi &= U'(|\Psi|^2)\Psi & \Rightarrow & \quad \xi^2 f'' - \frac{1}{2} a^2 f = (-1 + f^2) f & (ii)
 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen sind ( $h_0 =$  äußeres Magnetfeld)

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0, & a'(0) &= h_0 \\
 f(\infty) &= 1, & a(\infty) &= 0.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind recht nichtlinear und im allgemeinen nur mit Hilfe eines Computers lösbar. Einfach zu behandeln sind die beiden Grenzfälle  $\xi \ll \lambda$  und  $\xi \gg \lambda$ .

1.  $\xi \ll \lambda$  In diesem Fall dürfen wir den Term  $\xi^2 f''$  in (ii) vernachlässigen. Die resultierende Gleichung  $-\frac{1}{2} a^2 f = (-1 + f^2) f$  hat nur zwei Lösungen:

$$\begin{aligned}
 f &= 0 & \text{und} & & a & \text{beliebig (Vakuum);} \\
 f &= 1 & \text{und} & & a & = 0 \quad (\text{Supraleiter}).
 \end{aligned}$$

Das System springt an der Grenzfläche zwischen den beiden Lösungen. (Genauer ändert sich  $f$  von 0 auf 1 über die kleine Länge  $\xi$ .) Dies ist der schon diskutierte London-Limes.

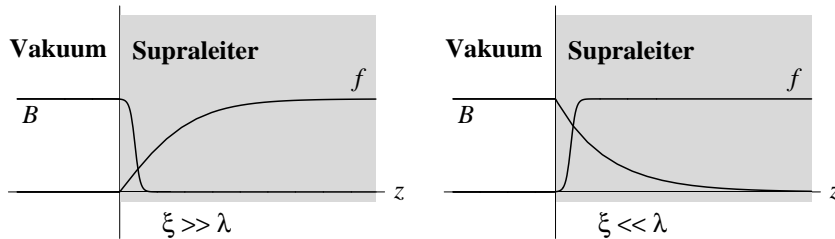
2.  $\xi \gg \lambda$  Hier ist das Magnetfeld die sich rasch ändernde Größe, und  $f$  wächst langsam von 0 auf 1 an. Über dem Bereich, wo sich  $f$  ändert, dürfen wir  $a$  praktisch als Null ansehen. Es resultiert dann die Gleichung

$$\xi^2 f'' = -1(1 - f^2) f.$$

Ihre Lösung zu den angegebenen Randbedingungen ist

$$f(z) = \tanh\left(\frac{z}{\sqrt{2}\xi}\right),$$

wie man leicht nachrechnet. Die Größe  $\xi$  heißt *Kohärenzlänge*. Sie bestimmt die Distanz, über der  $|\Psi|^2$  sich ändert.



**Abbildung 6.2.** In dem Bereich  $z > 0$  gilt  $f \sim \tanh(z/(\sqrt{2}\xi))$  für den Grenzfall  $\xi \gg \lambda$  bzw.  $B \sim e^{-z/\lambda}$  für  $\xi \ll \lambda$

Ein ehrgeiziges Ziel wäre, hier auch noch die Vortex-Lösung (Abrikosov) zu diskutieren!

## 6.4 Abelsches Higgs-Modell

Warum nicht Elektronen? (sind Fermionen mit Spin 1/2).

Das Abelsche Higgs-Modell ist eine relativistische kovariante Verallgemeinerung der Ginzburg-Landau-Theorie. Es hat keine direkte physikalische Anwendung, illustriert aber den Higgs-Mechanismus, mit dem in der *elektroschwachen Theorie* (= vereinheitlichte Theorie der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung) die Vektorbosonen  $W^+$ ,  $W^-$  und  $Z^0$  massiv werden.

Wir haben zwei Typen von Feldern:

$$A = A_\mu dx^\mu \quad (\text{Viererpotential oder „Eichfeld“})$$

$$\Psi : M_4 \mapsto \mathbb{C} \text{ komplexes skalares Feld (Higgs-Feld)}$$

Die Lagrange-Dichte ist

$$\mathcal{L}(A, dA, \Psi, d\Psi, \bar{\Psi}, d\bar{\Psi}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} dA \wedge \star dA$$

$$+ \left( d\bar{\Psi} + i \frac{e}{\hbar} A \bar{\Psi} \right) \wedge \star \left( d\Psi - i \frac{e}{\hbar} A \Psi \right) - U(|\Psi|^2) \sigma$$

mit  $U(x) = -\beta x + \gamma x^2/2$ .

( $d$  und  $\star$  sind hier im Gegensatz zum vorigen Abschnitt wieder vierdimensionales  $d$  und  $\star$ .)

$e$  heißt *Kopplungskonstante* (oder Ladung des Higgs-Teilchens).  $\hbar$  ist eine Konstante der Dimension Wirkung.

$$[\Psi] = \frac{\text{Wirkung}^{1/2}}{\text{Länge}} .$$

Die durch  $\mathcal{L}$  definierte Feldtheorie ist vollständig im Sinne der Bemerkungen (2) und (3) von Abschn. 6.1.

1. *Eichinvarianz*. Eichtransformationen sind durch

$$A \mapsto A + \frac{\hbar}{e} d\chi, \quad \Psi \mapsto e^{i\chi}, \quad \bar{\Psi} \mapsto e^{-i\chi} \bar{\Psi} .$$

erklärt. Diese Transformationen lassen  $\mathcal{L}$  invariant, wie man mit Hilfe von

$$d\Psi - i \frac{e}{\hbar} A \Psi \mapsto e^{i\chi} \left( d\Psi - i \frac{e}{\hbar} A \Psi \right)$$

$$d\bar{\Psi} + i \frac{e}{\hbar} A \bar{\Psi} \mapsto e^{-i\chi} \left( d\bar{\Psi} + i \frac{e}{\hbar} A \bar{\Psi} \right)$$

sofort sieht. War im Abschnitt über die Ginzburg-Landau Theorie zu zeigen.

2. *Feldgleichungen*.

a) Eichfeld:  $-d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dA)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A}$

$$\Rightarrow \hbar^2 \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} d \star dA = ie \bar{\Psi} \star (\hbar d\Psi - ie A \Psi) - ie \Psi \star (\hbar d\bar{\Psi} + ie A \bar{\Psi}) ;$$

Mit den Definitionen  $F := dA$ ,  $G = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \star F$  und

$J = -i \frac{e}{\hbar} \star (\bar{\Psi}(d\Psi - ieA\Psi) - (d\bar{\Psi} - ieA\bar{\Psi})\Psi)$  entstehen die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen  $dG = J$ .

b) Higgs-Feld:  $d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(d\bar{\Psi})}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(d\Psi)}$  und c.c.

( $\Psi = \text{Re } \Psi + i \text{Im } \Psi$  und  $\bar{\Psi} = \text{Re } \bar{\Psi} - i \text{Im } \bar{\Psi}$  sind linear unabhängige Größen und als solche unabhängig zu variieren.)

Die Feldgleichung für  $\Psi$  lautet:

$$d \star (d\Psi - i \frac{e}{\hbar} A\Psi) = i \frac{e}{\hbar} A \wedge \star (d\Psi - i \frac{e}{\hbar} A\Psi) - U'(|\Psi|^2) \Psi \sigma .$$

Mit dem (modifizierten) Laplace-Operator

$$\Delta_A \Psi := - \star \left( d - i \frac{e}{\hbar} A \right) \wedge \star \left( d\Psi - i \frac{e}{\hbar} A \Psi \right) \Psi$$

wird sie zu:  $\Delta_A \Psi = U'(|\Psi|^2) \Psi$ .

Komplexes Konjugieren gibt die andere Gleichung

$$\bar{\Delta}_A \bar{\Psi} = U'(|\Psi|^2) \bar{\Psi} .$$

Um etwas über den Zustand niedrigster Energie (= Vakuum) dieser Feldtheorie zu lernen, gehen wir per Legendre-Transformation von der Lagrange-Dichte zur Hamilton-Funktion über.

Raum-Zeit-Zerlegung des Eichfeldes:  $A = -\Phi dt + \mathcal{A}$ .

Bekanntlich ist

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} dA \wedge \star dA = \frac{1}{2} F \wedge G = \frac{1}{2} (E \wedge D - B \wedge H) \wedge dt .$$

Wir wählen die *temporale Eichung*  $\Phi = 0$ . (Diese Eichbedingung ist nicht relativistisch kovariant. Eine Verletzung der Kovarianz ist aber unvermeidlich, wenn man von der Energie – einer nicht invarianten, d.h. beobachter-abhängigen Größe – reden will.)

Wir haben dann:

$$\begin{aligned} E &= -\dot{\mathcal{A}} \quad , \quad D = -\varepsilon_0 \star_3 \dot{\mathcal{A}} \quad , \\ B &= d\mathcal{A} \quad , \quad H = \mu_0^{-1} \star_3 d\mathcal{A} . \end{aligned}$$

( $\star_3$  = Sternoperator im  $E_3$ .)

Die Lagrange-Dichte wird zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \tilde{\mathcal{L}} \wedge dt \quad , \\ \tilde{\mathcal{L}} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \dot{\mathcal{A}} \wedge \star_3 \dot{\mathcal{A}} - \frac{1}{2\mu_0} d\mathcal{A} \wedge \star_3 d\mathcal{A} + |\dot{\Psi}|^2 dV \\ &\quad - \left( d\bar{\Psi} + i \frac{e}{\hbar} \mathcal{A}\bar{\Psi} \right) \wedge \star_3 \left( d\Psi - i \frac{e}{\hbar} \mathcal{A}\Psi \right) - U(|\Psi|^2) dV . \end{aligned}$$

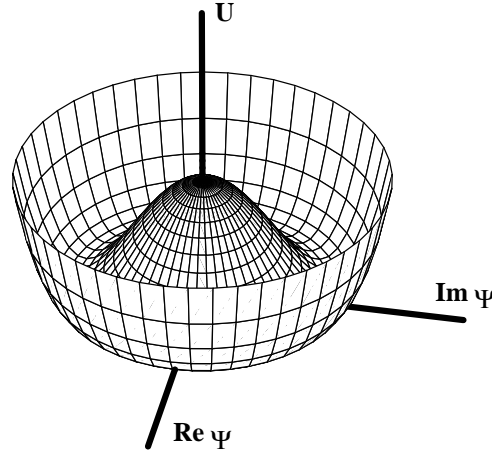
Die kanonischen (Feld-)Impulse sind

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathcal{A}} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\mathcal{A}}} = \varepsilon_0 \star_3 \dot{\mathcal{A}} = -D \\ \Pi_{\Psi} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\Psi}} = \dot{\Psi} dV, \quad \Pi_{\bar{\Psi}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{\Psi}}} = \dot{\bar{\Psi}} dV.\end{aligned}$$

durch Legendre-Transformation (in der üblichen Weise, nämlich  $H = pq - L$ ) folgt die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \int_{E_3} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_0} \Pi_{\mathcal{A}} \wedge \star_3 \Pi_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2\mu_0} d\mathcal{A} \wedge \star_3 d\mathcal{A} + \Pi_{\Psi} \wedge \star_3 \Pi_{\bar{\Psi}} \right. \\ &\quad \left. + \left( d\bar{\Psi} + \frac{ie}{\hbar} \mathcal{A}\bar{\Psi} \right) \wedge \star_3 \left( d\Psi - \frac{ie}{\hbar} \mathcal{A}\Psi \right) + U(|\Psi|^2) dV \right\}.\end{aligned}$$

Abb. 6.3 zeigt die Form des Potentials  $U(|\Psi|^2)$ . Es besitzt ein (entartetes)



**Abbildung 6.3.** Das Potential des Abelschen Higgs-Modells

globales Minimum für  $|\Psi|^2 = \beta/\gamma$ .

Die Hamilton-Funktion wird wie immer als die Energie des Systems interpretiert. (Beachte, daß

$$\frac{1}{2\varepsilon_0} \Pi_{\mathcal{A}} \wedge \star_3 \Pi_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2\mu_0} d\mathcal{A} \wedge \star_3 d\mathcal{A} = \frac{1}{2} E \wedge D + \frac{1}{2} B \wedge H$$

der uns wohlbekannter Ausdruck für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist.)

Betrachte  $\mathcal{A}_{\text{vac}} = d\chi$ ,  $\Psi_{\text{vac}} = \sqrt{\beta/\gamma} \cdot e^{ie\chi/\hbar}$  mit  $\chi$  einer zeitunabhängigen, aber sonst beliebigen Funktion. Notation für Eichtransformation einheitlich machen, und setze  $\Pi_{\mathcal{A}} = \Pi_{\Psi} = \Pi_{\bar{\Psi}} \equiv 0$ . Diese Wahl macht den positiv definiten Ausdruck

$$\frac{1}{2\epsilon_0} \Pi_{\mathcal{A}} \wedge \star_3 \Pi_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{d}\mathcal{A} \wedge \star_3 \mathbf{d}\mathcal{A} + \Pi_{\bar{\Psi}} \wedge \star_3 \Pi_{\bar{\Psi}} \\ + \left( \mathbf{d}\bar{\Psi} + i \frac{e}{\hbar} \mathcal{A} \bar{\Psi} \right) \wedge \star_3 \left( \mathbf{d}\Psi - i \frac{e}{\hbar} \mathcal{A} \Psi \right)$$

zu Null, und er minimiert  $U$ . (Außerdem werden die kanonischen Gleichungen gelöst.) Deshalb handelt es sich bei diesen Feldern um einen Zustand niedrigster Energie (= Vakuum).

Die Unbestimmtheit von  $\chi$  ist eine Konsequenz der Eichinvarianz (Freiheit), die nach Wahl der temporalen Eichung noch verbleibt. Wir können z.B.  $\chi = 0$  wählen.

Der von Null verschiedene Vakuumwert des Higgs-Feldes gibt dem Eichfeld  $\mathcal{A}$  eine „effektive Masse“, d.h. er macht die durch das elektromagnetische Feld vermittelte Wechselwirkung kurzreichweitig. Für den Fall eines statischen äußeren Magnetfeldes ist dies aus der (mit  $\Pi_{\mathcal{A}} = \Pi_{\Psi} = \Pi_{\bar{\Psi}} \equiv 0$  perfekten) Analogie zur Ginzburg-Landau-Theorie der Supraleitung sofort klar: Das Higgs-Feld verdrängt das Magnetfeld durch Anwerfen von Higgs-Strömen. Elektrische Felder werden durch Higgs-Polarisationsladungen verdrängt. (Hier nicht gezeigt.)

[Was wir hier skizziert haben, ist der Prototyp des sogenannten Higgs-Mechanismus, der in der Weinberg-Salam-Glashow-Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung benutzt wird, um den Eichfeldern  $W^+$ ,  $W^-$  und  $Z^0$  (aber nicht dem Photon) die experimentell beobachtete kurze Reichweite von  $< 10^{-17}$  m zu geben. Nach dem Higgs-Teilchen (= Quantum des Higgs-Feldes) wird experimentell eifrig gesucht, es ist aber noch nicht gefunden worden.]

Hörerfrage: was hat Abschirmung, Verdrängung mit Massivwerden zu tun?

Wichtig: in vier Raum-Zeit-Dimensionen sind Eichtheorien ausgezeichnet. In Quantenfeldtheorien treten notorische Divergenzen auf (ein Beispiel hatten wir gesehen: unendliche Feldenergie einer Punktladung). Um die Vorhersagekraft zu behalten, dürfen nur endlich viele Type von Divergenzen auftreten.

## 6.5 Quanten-Halleffekt und Chern-Simons-Wirkung

Allgemeiner (lokaler) Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke  $E$  und elektrischer Stromdichte  $j$  in einem zweidimensionalen Medium:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

oder  $\mathbf{j} = \underline{\sigma} \mathbf{E}$ .  $\underline{\sigma}$  ist der Tensor der elektrischen Leitfähigkeit. Aus Rotationsinvarianz folgt (Onsager)

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} \quad \text{und} \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} .$$

In Anwesenheit eines Magnetfelds ist  $\sigma_{xy}$  im allgemeinen von Null verschieden. (Klassischen Halleffekt erläutern...) (Experimentelle Geometrie für den Quanten-Halleffekt beschreiben und durch eine Abbildung illustrieren...)

Beobachtung: für  $B \sim \mathcal{O}(1)$  Tesla und  $T \sim \mathcal{O}(1)$  Kelvin existieren Magnetfeldbereiche, wo  $\sigma_{xx} = 0$  und  $\sigma_{xy} = \nu e^2/h =: \sigma_H$  mit quantisierten Werten von  $\nu = p/q$ . (Am sichtbarsten sind die Jain-Serien  $\nu = p/(2p \pm 1)$ .) (Hohe Präzision der Quantisierung  $\rightarrow$  Widerstandsstandard). Hallplateau:

$$j_x = \sigma_H E_y, \quad j_y = -\sigma_H E_x.$$

Abbildung

Daß die Vektorfelder von  $E$  und  $j$  aufeinander senkrecht stehen, täuscht vor, daß die Metrik eine Rolle spielt.

Bessere Formulierung mit Differentialformen: Definiere Linienstromdichte  $j = k$  wie gewohnt in metrikfreier Weise durch  $\int_\gamma j = \text{Strom durch } \gamma$ . Dann ist

$$j = j_x dy - j_y dx.$$

Abbildung zur Illustration (oder Erinnerung). Dann

$$j = \sigma_H E$$

(metrikfreie Relation; hängt nur noch von der Orientierung ab: unter Raumspiegelung ändert  $\sigma_H$  sein Vorzeichen. Als Differentialformen sind  $E$  gerade und  $j$  ungerade.) Interpretation: die Stromlinien folgen den Äquipotentiallinien. (Die 1-Formen  $j$  und  $E$  werden in zwei Dimensionen durch 1-Ketten veranschaulicht.)

Induktionsgesetz  $\Rightarrow \dot{B} = -dE = -dj/\sigma_H = \dot{\rho}/\sigma_H$ .

Durch Integration folgt  $\rho = \sigma_H B + \text{const}$ ; empirisch (oder durch eine quantenmechanische Betrachtung) findet man  $\text{const} = 0$ .

Faraday-Form:  $F = B + E \wedge dt$

Dreierstrom (eine 2-Form):  $J = \rho + j \wedge dt$

Ladungserhaltung:  $0 = dJ = dt \wedge (\dot{\rho} + dj)$  Insgesamt:

$$\boxed{J = \sigma_H F}$$

Für konstante Hall-Leitfähigkeit  $\sigma_H$  ist diese Relation kompatibel mit dem Induktionsgesetz  $0 = dF = dt \wedge (\dot{B} + dE)$ .

Interpretation:  $[\rho, B$  werden durch 0-Ketten veranschaulicht ( $\rho$  durch Punktladungen,  $B$  durch die Kreuzungspunkte der magnetischen Flußlinien mit der Ebene des Elektronengases).]

‘‘Jede Punktladung (jedes Elektron) trägt eine magnetische Flußlinie mit Fluß  $e/\sigma_H$  mit sich herum.’’

Welche Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  zieht ein solches Gesetz nach sich? Setze  $J = db$  ( $b = \text{ein Potential für die 2-Form } J$ ). Behauptung:

$$\mathcal{L} = (2\sigma_H)^{-1} b \wedge db - A \wedge J$$

Verifikation:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = \frac{db}{2\sigma_H}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(db)} = \frac{b}{2\sigma_H} - A;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = -d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(db)} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{db}{2\sigma_H} = -d \left( \frac{b}{2\sigma_H} - A \right) = -\frac{db}{2\sigma_H} + F.$$

Es folgt in der Tat  $J/\sigma_H = F$ .

$b \wedge db$  heißt *Chern-Simons-Term*. Er ist nur bis auf Randterme ‘‘eichinvariant’’. Dies ist ein Hinweis darauf, daß die Theorie durch eine eindimensionale Feldtheorie für Randströme ergänzt werden muß. Ist Thema aktueller Forschung.



# A. Kleine Formelsammlung für das Rechnen mit Differentialformen

Die folgende Liste enthält die wichtigsten Regeln für den Umgang mit Differentialformen; sie erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Es sei  $E_n$  ein euklidischer Raum der Dimension  $n$ ,  $f$  und  $a_i (i = 1, 2, 3)$  Funktionen,  $\alpha$  eine  $k$ -Form,  $\beta$  eine  $l$ -Form,  $\Theta$  eine  $(k-1)$ -Form (falls  $k > 0$ ),  $v$  ein Vektorfeld,  $\Phi$  eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen zweier affiner Räume (die Bildmenge von  $\Phi$  liege in  $E_n$ ) und  $C$  ein geeignetes Integrationsgebiet.

## Äußeres Produkt

$$f \wedge \alpha = \alpha \wedge f := f \cdot \alpha \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha \quad (\text{A.2})$$

## Inneres Produkt

$$i_v f = 0 ; i_v \left( \sum_{i=1}^n a_i dx^i \right) = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad (\text{A.3})$$

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_v \beta) \quad (\text{A.4})$$

## Äußere Ableitung

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (\text{A.5})$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta) \quad (\text{A.6})$$

$$d \circ d = 0 ; \text{Poincaré: } d\alpha = 0 \implies (\text{lokal :}) \alpha = d\Theta \quad (\text{A.7})$$

## Pullback

$$\Phi^* f = f \circ \Phi \quad (\text{A.8})$$

$$\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\Phi^* \alpha) \wedge (\Phi^* \beta) \quad (\text{A.9})$$

$$\Phi^* \circ d = d \circ \Phi^* \quad (\text{A.10})$$

## Integration

$$\int_{\Phi(C)} \alpha = \int_C \Phi^* \alpha \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Stokes: } \int_C d\alpha = \int_{\partial C} \alpha \quad (\text{A.12})$$

**Sternoperator** (im  $E_3$ )

$$\star\star = \text{id} \quad (\text{A.13})$$

$$\star dx = dy \wedge dz \quad (\text{und zyklisch}) \quad (\text{A.14})$$

$$\star dx \wedge dy \wedge dz = 1 \quad (\text{A.15})$$

$$\alpha \wedge \star\beta = \beta \wedge \star\alpha \quad (\text{falls } k = l) \quad (\text{A.16})$$

# Index

- ┐ (inneres Produkt), *siehe* Kap. 0.5
- Ableitung
  - partielle, 18
- Alternierende Multilinearformen, 7
- Ampere, 64, 106
- Basis
  - duale, 6
- Basisdarstellung
  - alternierender Multilinearformen, 10
- Boost, 186
- Cooper-Paare, 195
- Coulomb, 64
- Coulomb-Eichung, 110
- $d$  (Operator), 181
- $\Delta$  (Laplace-Operator), *siehe* Kap. 0.20, 185
- d'Alembert-Operator  $\square$ , 158
- Determinante, 14
- Dielektrische Konstante d. Vakuums, 81, 84
- Differential
  - einer Abbildung, 24
  - einer Funktion, 18
- Differentialform
  - $k$ -ten Grades ( $k$ -Form), 22
  - ersten Grades (1-Form), 19
  - exakte, 28
  - geschlossene, 28
  - Koordinatendarstellung, 23
  - top-dimensionale, 22
- Dilatation, 183
- Dipolmoment
  - elektrisches, 114
  - magnetisches, 115
- Dirichlet-Problem, 118
- Divergenz, 27
- Dualraum, 4
- $\varepsilon_0$ , *siehe* Dielektrische Konstante d. Vakuums
- Effektive Masse, 202
- Eichfeld, 199
- Eichpotential, 193
- Eichtransformation, 109
- Eindringtiefe, 161, 197
- Elektroschwache Theorie, 199
- Energiedichte, 86
- Energiestromdichte, 86
- Ereignis, 179
- Erregung
  - elektrische, 67
  - – Mesvorschrift, 90
  - magnetische, 69
  - – Mesvorschrift, 92
- Faraday-Form, 181, 182
- Faradaysches Induktionsgesetz, 75
- Feld
  - elektrisches, 82
  - elektromagnetisches, 82
  - magnetisches, 82
- Feldgleichungen, 192, 193, 199
- Feldstärke
  - elektrische, 71
  - magnetische, 72
- Fernzone (Dipolstrahlung), 171
- Flächenladungsdichte, 120, 124
- Flächenladungsdichte, 89
- Fluslinien, 68
- Flus
  - elektrischer, 68
  - magnetischer, 73
- Flusdichte
  - elektrische, 68
  - magnetische, 73
- Gradient, 21
- Greensche Funktion, 119
- GUT, 84

- $\hbar$ , *siehe* Plancksche Konstante  
 Hamiltonsches Prinzip, 191  
 Hauptsatz der Cartanschen Differentialrechnung, 51  
 Induktionsgesetz, *siehe* Faradaysches Induktionsgesetz  
 Inertialsystem, 179  
  
 $k$ -Form, 22  
 $k$ -Kette, 46  
 $k$ -Zelle, 44  
 Kapazität, 104  
 Kausalitätsprinzip, 164  
 Kohärenzlänge, 198  
 Konforme Gruppe, 183  
 Kontinuitätsgleichung, 52, *siehe* Kap. 1.2, 181  
 Koordinatenform, 19  
 Koordinatenfunktion, 18  
 Koordinatensystem  
 – affines, 2  
 – kartesisches, 3  
 Kopplungskonstante, 199  
 Kraft  
 – Coulomb-, 72  
 Kugelkondensator, 103  
  
 $L_X$  (Lie-Ableitung), *siehe* Kap. 0.18  
 Ladung, 64  
 Ladungsdichte  
 – elektrische, 65  
 – magnetische, 75  
 Ladungserhaltung, *siehe* Kap. 1.2, 181  
 Ladungsneutralität (Universum), 70  
 Lagrange-Dichte, 191, 193  
 Leistung (d. Feldes an Materie), 85  
 Leitfähigkeit, 161  
 Lenzsche Regel, 74  
 Lichtgeschwindigkeit, 84  
 Lichtkegel, 164  
 Linearform, 3  
 Linienstromdichte, 89  
 London-Limes, 197, 198  
 Lorentz-Eichung, 185  
 Lorentz-Gruppe, 180  
 Lorentz-Kraft, 72, 85, 106, 178  
  
 $\mathcal{M}$  (Operator), 165  
 $\mu_0$ , *siehe* Magnetische Permeabilität d. Vakuums  
 Magnetische Monopole, 83  
 Magnetische Permeabilität d. Vakuums, 81  
 Magnetisierung, 94  
 Materialgesetze, 80  
 Materialgleichungen, 182  
 Maxwell-Form, 182  
 Maxwell-Gleichungen  
 – homogene, *siehe* Kap. 1.4, 181  
 – inhomogene, 67  
 Monopolmoment (elektrisches), 114  
  
 Oberflächenladung, 89  
 Ohmsches Gesetz, 97, 161  
 Orientierung, 7  
  
 Parametrisierung, 34  
 Permeabilität, *siehe* Magnetische P.  
 Plancksche Konstante, 196  
 Poisson-Kern, 120  
 Poisson-Problem, 118  
 Polarisierung (elektrische), 93  
 Polarkoordinaten (sphärische), 102  
 Potential  
 – einer Punktladung, 107  
 – elektrostatisches, 107  
 – skalares magnetisches, 130  
 Poynting-Form, 86  
  
 Quadrupolmoment (elektrisches), 114  
 Quellterm (Wellengleichung), 158  
  
 Rand  
 – einer  $k$ -Kette, 46  
 – einer  $k$ -Zelle, 46  
 Raum  
 – affiner, 1  
 Raumwinkel-Form, 23  
 Rechte-Hand-Regel, 8  
 Ringspannung  
 – elektrische, 72  
 Rotation, 26  
  
 Skalarprodukt  
 – Lorentzsches, 179  
 Skin-Tiefe, *siehe* Eindringtiefe  
 Spannung  
 – elektrische, 72  
 – magnetische, 70  
 – statische, 103  
 Sternförmig, 28  
 Stromdichte  
 – elektrische, 66  
 Supraleiter, 92, 195  
  
 Tangentenvektor, 34  
 Temporale Eichung, 200

## Transformation

- aktive, 186
- passive, 186

Vektorbosonen, 199

Vektorpotential, 109

Vierer-Strom, 181, 182, 194

Viererpotential, 185, 199

Weinberg-Salam-Glashow-Theorie, 202

Welle (elektromagnetische), 84

Wellenoperator, 158

Weltpunkt, *siehe* Ereignis

Winkel-1-Form, 37

Wirkungsfunktional, 192

Wirkungsprinzip, 192

Zylinderkoordinaten, 104